На правах рукописи

Гадоев Махмадрахим Гафурович

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ И ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЙ ГРИНА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ОЦЕНКАМ СПЕКТРОВ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Новосибирск - 2009

Работа выполнена в ФГНУ "НИИ математики при Якутском государственном университете им. М.К. Аммосова "

Научные консультанты: доктор физико - математических наук,
академик АН Респ. Таджикистан,
профессор $\boxed{\text{Бойматов К. Х.}}$,
доктор физико - математических наук,
профессор Егоров И. Е.

Официальные оппоненты: доктор физико - математических наук,
профессор Костюченко А. Г.
доктор физико - математических наук,
профессор Кожанов А. И.
доктор физико - математических наук,
профессор Петрушко И. М.

Ведущая организация: Южно - Уральский государственный университет

Защита диссертации состоится "__ "________200__ г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.174.02 при Новосибирском государственном университете по адресу: 630090, Новосибирск, ул. Пирогова , 2

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного университета.

Автореферат разослан "__"________200__г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Н.И. Макаренко

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертация посвящена актуальным проблемам современной спектральной теории несамосопряженных дифференциальных и псевдодифференциальных операторов; таким вопросам, как исследование полноты системы корневых вектор-функций, суммируемости методом Абеля со скобками и вопросам асимптотического поведения собственных значений аккретивных операторов и операторов существенно далеких от самосопряженных.

Исследования несамосопряженных операторов начинаются с работ М.В. Келдыша (1951г.) и в настоящее время другими математиками опубликовано более ста работ, в том числе и монографий. Этому направлению посвящены работы М.С. Аграновича, А.С. Маркуса, В.Власова, А.Г. Костюченко, А.А. Шкаликова, К.Х. Бойматова, А.Н. Кожевникова, И.Е. Егорова, С.Г. Пяткова, С.Я. Якубова, M. Sango, M. Faierman, M. Moller и др.

Первая глава диссертации посвящена выделению широких классов матричных псевдодифференциальных операторов с τ- символами, которые могут породить сильно-непрерывную полугруппу в банаховых L_p - пространствах с весом, и выделению главной части полугруппы в явном виде. Эта тематика относится к актуальным проблемам современной теории сильно-непрерывных операторных полугрупп.

Проблемам конструкции матрицы Грина эллиптических и параболических уравнений посвящены работы С.Д. Эйдельмана, А.Г.Костюченко, С.Д. Ивасишена, К.Х. Бойматова, О.А. Олейника, А. Фридмана, О.А. Ладыженской, Н.Н. Уральцевой и других авторов. Однако исследованию этих проблем для позитивных матричных дифференциальных операторов посвящено сравнительно мало работ.

В настоящей работе изучены сильно позитивные матричные псевдодифференциальные операторы в L_p - пространствах. Исследование спектральных асимптотик дифференциальных и псевдодифференциальных операторов, далеких от самосопряженных, является новым актуальным направлением теории несамосопряженных операторов и берет начало с работ М.С. Аграновича, А.С. Маркуса, К.Х. Бойматова, А.Г. Костюченко, Г.В. Розенблюма, А.Н. Кожевникова.

В данной работе исследуются спектральные свойства несамосопряженного эллиптического оператора, ассоциированного с некоэрцитивной билинейной формой.

Спектральная асимптотика эллиптических дифференциальных операторов с негладкими коэффициентами, заданных в ограниченной области, в основном, исследовалась вариационным методом. Применение тауберовых методов в исследовании спектральных асимптотик дифференциальных операторов обычно приводило к некоторым жестким ограничениям на гладкость коэффициентов исследуемого оператора. В настоящей работе тауберовом методом исследуется спектральная асимптотика вырождающегося эллиптического дифференциального оператора с негладкими коэффициентами в ограниченной области.

Основная цель диссертации:

– исследование спектральных свойств матричных дифференциальных и псевдодифференциальных операторов далеких от самосопряженных;

– получение условия позитивности, m - аккретивности исследуемых операторов;

– оценка резольвенты;

– исследование полугруппы операторов, порожденных системами псевдодифференциальных операторов в весовых L_p - пространствах, $1 \leq p < \infty$ и в пространствах непрерывных вектор-функций, заданных в R^n (или на компактном многообразии);

– получение условия сильной непрерывности (и аналитичности) операторных полугрупп, порожденных m - аккретивными псевдодифференциальными операторами;

– получение интегральных представлений этих полугрупп, асимптотически выделяющих их главный член при $t \to 0$ или $Rez \to 0$;

– получение асимптотики числа собственных значений указанных классов псевдодифференциальных операторов;

– получение аналогичных результатов для псевдодифференциальных операторов, заданных на компактных многообразиях;

– исследование асимптотического поведения собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ для матричных эллиптических операторов высокого порядка на отрезке, со степенным вырождением, в случае, когда собственные значения непростые;

– исследование полноты системы корневых вектор-функций рассматриваемых операторов и возможность суммируемости по этой системе методом Абеля со скобками;

– получение аналогичных результатов для операторов второго порядка, но в случае нестепенного вырождения;

– исследование асимптотики взвешенного следа самосопряженных матричных дифференциальных операторов с негладкими коэффициентами в многомерной области;

–исследование спектральных свойств несамосопряженных вырожденно-эллиптических систем второго порядка.

Методика исследования.

В работе нами использован метод конструкции эллиптической и параболической матрицы Грина, выделяющий асимптотически в явном виде главный член резольвенты или соответствующей полугруппы.

При исследовании спектральных асимптотик дифференциальных операторов и вычислении асимптотики взвешеного следа использованный нами метод является модификацией тауберова подхода Костюченко-Бойматова.

Основные результаты и их новизна.

В результате исследования получены следующие новые результаты:

– выделен широкий класс m- аккретивных псевдодифференциальных операторов с матричными символами, порождающие сильно-непрерывные полугруппы в банаховых L_p - пространствах с весом, $1 \leq p < \infty$ в R^n;

– получена асимптотическая формула, выделяющая главный член функции распределения собственных значений инфинитезимального производящего оператора A при любых $1 \leq p < \infty$;

– в случае самосопряженных генераторов, при $p = 2$, исследована также асимптотика взвешенного следа;

– получены достаточные условия сильной непрерывности указанной полугруппы;

– получено интегральное представление полугрупп, выделяющее ее главный член асимптотически при $t \to 0$ ($\mathrm{Re}\ z \to 0$);

– изучены также соответствующие аналитические полугруппы, порождаемые указанными выше операторами;

– такие же исследования проведены также и в случае операторов, заданных на компактных многообразиях без края;

– исследована спектральная асимптотика эллиптических матричных дифференциальных операторов, далеких от самосопряженных, со степенным вырождением;

– исследованы вопросы полноты системы корневых вектор-функций указанных операторов и возможность суммируемости по этой системе методом Абеля со скобками;

– аналогичные результаты получены для операторов второго порядка в случае нестепенного вырождения;

– исследована асимптотика взвешенного следа матричных вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов в многомерной области;

– в работе впервые разработана тауберова методика исследования спектральных асимптотик самосопряженных дифференциальных операторов с негладкими коэффициентами, заданными в ограниченной области;

– получена асимптотическая формула для функции распределения собственных значений эллиптической системы второго порядка.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Результаты диссертации носят теоретический характер. Полученные в ней результаты могут служить основой для дальнейших теоретических исследований в спектральной теории дифференциальных и псевдодифференциальных операторов далеких от самосопряженных (или заданных в банаховых L_p - пространствах с весом), в теории сильно-непрерывных операторных полугрупп, порожденных псевдодифференциальными операторами и в теории разрешимости уравнений параболического типа, при построении матрицы Грина.

Практическая ценность работы заключается в том, что результаты работы могут быть использованы в МГУ им. М.В. Ломоносова, МИРАН им. В.А. Стеклова, ЛГУ, ИМ АН Респ. Азербайджан, ИМ НАН Украины и т.д.

Апробация работы.

Основные научные результаты диссертации докладывались и обсуждались на всесоюзных и республиканских конференциях (г. Душанбе, 1987, г. Уфа, 1989, г.Ленинабад, 1990,г.Курган-тюбе, 1991, г. Куляб, 1991, г. Караганда, 1991, г. Киев, 1992), Международной конференции по "Дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами"(Душанбе, 1996), Международных конференциях по математическому моделированию (Якутск 2001, 2004, 2007), Сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике ИНПРИМ-2000

(Новосибирск, 2000), Международном Российско-Узбекском симпозиуме "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики"(Нальчик 2003), Международной конференции "Некорректные и обратные задачи", посвященной 70-летию академика М.М. Лаврентьева (Новосибирск 2002), Международной конференции по "Дифференциальным и интегральным уравнениям с сингулярными коэффициентами"(Душанбе 2003), Международной конференции "Функциональные пространства, теория приближения, нелинейный анализ", посвященной 100-летию академика С.М. Никольского (Москва, 23-29 мая 2005), Республиканской научной конференции "Комплексный анализ и неклассические системы дифференциальных уравнений"(Душанбе, 2007), Международной конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", посвященной 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа (Новосибирск, 28 мая- 2 июня 2007), Международной конференции "Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений", посвященной 100 - летию со дня рождения академика С.Л. Соболева (Новосибирск, 5-12 октября 2008) и на ряде других конференций.

На различных стадиях выполнения работа обсуждалась на семинаре под руководством проф. А.Г. Костюченко и проф. А.А. Шкаликова (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 1991,2002), семинаре по математическим проблемам механики и сплошных сред, под руководством академика РАН $\boxed{\text{В.Н. Монахова}}$ и чл.-корр. РАН П.И. Плотникова (Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 2005), семинаре отдела теории функций, под руководством д.ф.-м.н., проф. А.И. Кожанова (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 2003,2005), семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений под руководством д.ф-м.н., проф. М.В. Фокина и д.ф.-м.н., проф. В.С. Белоносова (Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,2005), семинаре Института математики Якутского госуниверситета, под руководством д.ф.-м.н., проф. И.Е. Егорова (2005, 2009) , обьединенном семинаре Института математики АН Респ. Таджикистан (2001-2007), семинаре кафедры общей математики Мирнинского политехнического института (1999-2009), семинаре "Уравнения Соболевского типа"кафедры "Уравнения математической физики", под руководством д.ф.-м.н.,проф. Г.А. Свиридюка (г. Челябинск, Южно-Уральский государственый университет, 2009).

Публикации.

По теме диссертации опубликовано более 50 работ. Основные результаты диссертации содержатся в 29 работах, список которых приведен в конце автореферата. Из совместных публикаций в диссертационную работу включены результаты, полученные непосредственно автором.

Работа частично поддержана аналитической ведомственной целевой программой "Развитие научного потенциала высшей школы (2009 -2010 годы)", мероприятие 2 (код проекта 3443).

Структура и объем диссертации.

Работа состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Объем работы - 234 страницы. Список литературы содержит 136 наименований.

Краткое содержание работы

Введение носит обзорный характер. Обосновывается актуальность темы диссертации, дается анализ имеющихся в литературе результатов, приведено краткое содержание диссертации.

Первая глава, состоящая из пяти параграфов, посвящена исследованию сильно непрерывных полугрупп операторов, порожденные системами псевдодифференциальных операторов в весовых L_p пространствах, $1 \leq p < \infty$ и в пространствах непрерывных вектор-функций, заданных в R^n (и на компактном многообразии).

Первый параграф имеет вводный характер, в нем приводится формулировка основных результатов.

Второй параграф посвящен оценкам норм некоторых интегральных операторов, необходимых для дальнейшего исследования.

Доказательства основных теорем приведены в третьем параграфе.

Пусть $k(x)\,(x \in R^n)$ - весовая функция в R^n, $\mathcal{H}_{p,k}, 1 \leq p < +\infty$ - пространство вектор-функций $u(x) = (u_1(x), \dots, u_l(x))'$, с конечной нормой

$$|u|_{\mathcal{H}_{p,k}} = (\sum_{j=1}^{l} \int\limits_{R^n} k^p(x)|u_j(x)|^p dx)^{1/p}.$$

Для $p = +\infty$, $\mathcal{H}_{p,k}$ определяется как пространство вектор-функций $u(x)$, с конечной нормой

$$|u|_{\mathcal{H}_{\infty,k}} = \max_{j=1,\dots,l}\{vrai \sup_{x\in R^n} |k(x)u_j(x)|\}.$$

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{H}_{p,k} = L_{p,k}(R^n)^l, 1 \le p < +\infty$ псевдодифференциальный оператор (п.д.о) с τ-символом:

$$(A_0u)(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} (\int\limits_{R^n} e^{is(x-y)} a(\tau x + (1-\tau)y, s)u(y)dy)ds,$$

где $0 \le \tau \le 1$, а символ

$$a(x,s) \in C^\infty(R^n \times R^n;\, End\,\mathbf{C}^l),$$

и удовлетворяет условиям:

$$(1+|s|)^\varepsilon \le Ma'(x,s), \tag{1}$$

$$|D_s^\alpha D_x^\beta a(x,s)| \le M_{\alpha\beta} a'(x,s)^{1-\theta|\alpha|}, \quad \alpha+\beta \ne 0. \tag{2}$$

Здесь $a'(x,s)$ обозначает нижнюю грань матрицы $Re\, a(x,s)$, а $\varepsilon, \theta > 0$. Под нормой $|b|$ матрицы $b \in End\,\mathbf{C}^l$ понимается верхняя грань чисел $|bh|_{\mathbf{C}^l}$, где h пробегает единичную сферу в $\mathbf{C}^l$, а $|h|_{\mathbf{C}^l} = (\sum\limits_{i=1}^{l} |h_i|^2)^{1/2}$.

Сначала сформирулируем основные результаты первой главы в случае p=2.

Оператор A_0' - формально сопряженный к оператору A_0 задается по формуле

$$(A_0'u)(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} (\int\limits_{R^n} e^{is(x-y)} a^*(\tau y + (1-\tau)x, s)u(y)dy)ds.$$

Имеем

$$(A_0u, v) = (u, A_0'v), \quad \forall u,v \in C_0^\infty(R^n)^l,$$

где

$$(f_1, f_2) = \int\limits_{R^n} < f_1(x), f_2(x) >_{\mathbf{C}^l} dx$$

- скалярное произведение в $\mathcal{H}_2$. Этим обозначением мы будем пользоваться также и для произвольных $f_1, f_2 \in L_{1,loc}(R^n)^l$, для которых интеграл абсолютно сходится.

Один из основных результатов первой главы заключается в выделении достаточных условий на символ $a(x,s)$, при выполнении которых замыкание $\mathcal{A}_2$ в $\mathcal{H}_2$ оператора A_0, $D(A_0) = C_0^\infty(R^n)^l$, будет квази-$m$-аккретивным оператором в $\mathcal{H}_2$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (1), (2). Тогда $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2$ - квази-m-аккретивный оператор в $\mathcal{H}_2$.*

Пример 1. $a(x,s) = (1+|s|^2)^\eta + 1 + |x| + i|x|^2$, где $\eta > 0$.

В литературе, в основном, достаточно подробно исследованы условия полуограниченности и существенной самосопряженности минимальных дифференциальных и псевдодифференциальных операторов. Условия m-секториальности и m-аккретивности в случае отсутствия граничных условий изучены менее активно.

Заметим, что в приведенном выше примере 1, оператор $\mathcal{A}$ не будет m-секториальным оператором в $\mathcal{H}_2$.

Достаточные условия m-секториальности п.д.о. приведены в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (1), (2). Пусть кроме того, множество*

$$X = \{< a(x,s)h, h >_{\mathbf{C}^l} :\ x, s \in R^n,\ h \in \mathbf{C}^l\},$$

расположено в секторе

$$S = \{z \in \mathbf{C}\ :\ |arg\, z| \leq \nu\}, \quad 0 \leq \nu < \pi/2.$$

Тогда $\mathcal{A}$ – m-секториальный оператор в $\mathcal{H}_2$. Оператор $\mathcal{A}$ является инфинитезимальным производящим оператором аналитической полугруппы $e^{-z\mathcal{A}}$, $z \in S'$,

$$S' = \{z \in \mathbf{C}\ :\ |arg\, z| < \nu'\}, \quad \nu' < \pi/2 - \nu.$$

Для формулировки результата об интегральном представлении полугрупп $e^{-t\mathcal{A}}$, $e^{-z\mathcal{A}}$ введем в рассмотрение функции $\theta_i(t), \psi_{ij}(x), \varphi_{ij}(x);\ i,j = 1,2,\ldots$.

Функции $\theta_i \in C_0^\infty(2^{-i-1}, 2^{-i+1}), i = 1,2,\ldots$ и обладают следующим свойством:

$$\sup_{i=1,2,\ldots} |\theta_i'(t)| \leq Mt^{-1}, \quad \sum_{i=1}^{+\infty} \theta_i(t) \equiv 1 \quad (0 < t < 1/2).$$

Функции $\psi_{ij}, \varphi_{ij} \in C_0^\infty(R^n)$ - неотрицательные,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \varphi_{ij}(x) \equiv 1,$$

и функция $\psi_{ij}(x)$ обращается в 1 в некоторой окрестности $supp\, \varphi_{ij}$. Выполняются также следующие соотношения:

$$|diam\, supp\, \psi_{ij}| \leq M 2^{-\nu i}, \quad |D_x^\alpha \psi_{ij}(x)| + |D_x^\alpha \varphi_{ij}(x)| \leq M_\alpha 2^{\nu|\alpha| i},$$

где $\nu > 0$ - некоторое фиксированное наперед заданное число.

Положим

$$J(z) = \sum_{i,j=1}^{+\infty} \theta_i(Re\, z)\psi_{ij} J_{ij}(z)\varphi_{ij}, \quad 0 < |Re\, z| < \frac{1}{2},$$

где $J_{ij}(z)$ - п.д.о. в R^n с "постоянным"символом

$$J_{ij}(z; s) = e^{-za(x_{ij}, s)},$$

а $x_{ij} \in supp\, \varphi_{ij}$ - фиксированные точки; ψ_{ij}, φ_{ij} обозначают операторы умножения соответственно на функции $\psi_{ij}(x), \varphi_{ij}(x)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (1), (2). Тогда при достаточно малых $\nu, T > 0$ имеет место интегральное представление*

$$e^{-tA} = J(t) + \int_0^t J(t - t')\Phi(t')dt', \quad 0 < t < T,$$

где операторная функция $\Phi(t)$ удовлетворяет оценке

$$\|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2} \le Mt^{-\kappa}, \quad 0 < t < T,$$

с некоторым $\kappa \in (0, 1)$. При выполнении условий теоремы 2 справедливо представление

$$e^{-zA} = J(z) + \int_0^z J(z - z')\Phi(z')dz', \quad 0 < |z| < T,\, z \in S',$$

где интеграл берется по прямолинейному отрезку, а $\Phi(z)$ удовлетворяет оценке

$$\|\Phi(z)\|_{\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2} \le M|z|^{-\kappa}, \quad 0 < |z| < T,\, z \in S'.$$

Оператор-функция $\Phi(t)$ строится в виде ряда

$$\Phi(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} K_j(t),$$

где $K_1(t) = -(\frac{d}{dt} + \mathcal{A})J(t)$, а остальные $K_j(t)$ определяются по индукции:

$$K_{j+1}(t) = \int_0^t K_1(t - t')K_j(t')dt', \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Ядро $\Gamma(t; x, y)$ оператора $e^{-t\mathcal{A}}$ по определению есть матрица Грина параболической задачи

$$u'(t, x) = -\mathcal{A}u(t, x),$$

$$u(0,x)=g(x).$$

Таким образом, нами получена конструкция матрицы Грина указанной параболической задачи.

Исследованию матрицы Грина параболических задач, где $\mathcal{A}$ - эллиптический дифференциальный оператор с ограниченными коэффициентами, посвящено довольно большое число работ.

Случай эллиптического оператора $\mathcal{A}$ с растущими коэффициентами изучался в работах А.Г.Костюченко.

Некоторые аспекты L_p-теории полугрупп порожденных эллиптическими дифференциальными операторами второго порядка с вещественными коэффициентами изучались в работах В.Ф.Коваленко, Ю.А. Семенова.

Таким образом, в первой главе случай m-секториальных (и тем более случай квази-m-аккретивных) систем п.д.о. рассматривается впервые. Полученные результаты являются новыми и в скалярном случае.

Перейдем к формулировке результатов для L_p-пространств $\mathcal{H}_p$ с весом.

Предположим, что

$$|s|^{|\gamma|}|D_s^{\alpha+\gamma}D_x^{\beta}a(x,s)|\le M_{\alpha,\beta}a'(x,s)^{1-\theta|\alpha|},\quad 0\ne|\gamma|\le n. \tag{3}$$

Относительно весовой функции $k(x)$ всюду в дальнейшем предполагается выполнение условия

$$\frac{k(x)}{k(y)}\le M(1+|x-y|^N),\quad x,y\in R^n, \tag{4}$$

где $M,N>0$ - достаточно большие числа.

Обозначим через $\mathcal{A}_{p,k}, 1\le p<+\infty$ замыкание в $\mathcal{H}_{p,k}$ оператора A_0 с областью определения $D(A_0)=C_0^\infty(R^n)^l$. Существование замыкания $\mathcal{A}_{p,k}$ стандартным образом выводится из того факта, что построенный выше п.д.о. A_0' является оператором, формально сопряженным к A_0.

Всюду в дальнейшем, когда речь идет о случаях $p=1$ и $p=+\infty$, мы, каждый раз дополнительно не оговаривая это, предполагаем, что выполнено следующее условие: семейство вектор-функций

$$\Omega_{\eta,t}(x)=\int\limits_{R^n}e^{isx}e^{-ta(\eta,s)}ds,\quad \eta\in R^n,\ 0<t<\frac{1}{2} \tag{5}$$

образует ограниченное множество в $L_1(R^n)$.

Это условие является естественным условием и эквивалентно тому, что семейство операторов e^{-tA_η}, $0 < t < \frac{1}{2}$, $\eta \in R^n$, где A_η - п.д.о. в R^n с символом $a(\eta, s)$, образует сильно непрерывную полугруппу в $L_1(R^n)^l$, (и в $L_\infty(R^n)^l$), равномерно ограниченную по $\eta \in R^n$. Очевидно, что без этого условия соответствующие утверждения наших теорем не будут верными при $p = 1, +\infty$.

Когда речь идет об аналитических полугруппах при $p = 1, +\infty$ предполагается, что выполнено следующее условие:

семейство вектор-функций

$$\Omega_{\eta,z}(x) = \int\limits_{R^n} e^{isx} e^{-za(\eta,s)} ds, \quad \eta \in R^n,\, z \in S,\, |z| < T \tag{6}$$

образует ограниченное множество в пространстве $L_1(R^n)^l$.

Здесь S обозначает сектор из правой полуплоскости, которому принадлежит множество X, определение которого дано в теореме 2.

Теорема 4. *Оператор $-\mathcal{A}_{p,k}, 1 \leq p < +\infty$ является порождающим оператором сильно непрерывной полугруппы в $\mathcal{H}_{p,k}$. При достаточно малых $\nu, T > 0$ справедливо представление*

$$e^{-t\mathcal{A}_{p,k}} = J(t) + \int\limits_0^t J(t-t')\Phi(t')dt', \quad 0 < t < T,$$

где оператор-функция $\Phi(t)$ удовлетворяет оценке

$$\|\Phi(t)\|_{\mathcal{H}_{p,k} \to \mathcal{H}_{p,k}} \leq M t^{-\kappa}, \quad 0 < t < T,$$

с некоторым $\kappa \in (0,1)$. Если множество

$$X \subset S = \{z \in \mathbf{C} \,:\, |arg\, z| \leq \nu\}, \quad 0 \leq \nu < \pi/2,$$

то

$$e^{-z\mathcal{A}_{p,k}}, \quad z \in S' = \{z \in \mathbf{C} \,:\, |arg\, z| \leq \nu'\}, \quad \nu' < \pi/2 - \nu,$$

есть аналитическая полугруппа и имеет место

$$e^{-z\mathcal{A}_{p,k}} = J(z) + \int\limits_0^z J(z-z')\Phi(z')dz',$$

где интеграл берется по прямолинейному отрезку, соединяющему точки $0, z$, а операторная-функция $\Phi(z)$ удовлетворяет оценке

$$\|\Phi(z)\|_{\mathcal{H}_{p,k} \to \mathcal{H}_{p,k}} \leq M|z|^{-\kappa}, \quad z \in S',\, |z| < T.$$

Как показывает пример уравнения теплопроводности

$$u'_t(t,x) = \Delta u(t,x), \quad u(0,x) = g(x),$$

утверждение теоремы 4 не имеет места в пространстве $\mathcal{H}_{\infty,k}$ уже для $k(x) \equiv 1$.

Имеем

$$u(t,x) = \int\limits_{R^n} \Gamma(t, x-y) g(y) dy,$$

где

$$\Gamma(t,\xi) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}.$$

Если $g \in C(R^n)$, то

$$\lim_{t \to +0} |u(t,x) - g(x)|_{L_\infty(\text{Ш}_R)} = 0,$$

для любого шара Ш_R радиуса R. Однако эта сходимость вообще говоря, не будет равномерной в R^n.

В этой связи нами вводится пространство $C_k^0(R^n)^l$ вектор-функций $u(x) \in L_{\infty,k}(R^n)^l$ непрерывных в R^n и удовлетворяющих оценке

$$k(x)|u(x)| = \text{o}(1), \quad x \to \infty.$$

В $C_k^0(R^n)^l$ вводится такая же норма, как $L_{\infty,k}(R^n)^l$. В результате $C_k^0(R^n)^l$ превращается в банахово пространство.

Обозначим через $\overset{\circ}{\mathcal{A}}_{\infty,k}$ замыкание в $C_k^0(R^n)^l$ оператора $A_0, D(A_0) = C_0^\infty(R^n)^l$.

Следующий результат в некотором смысле восполняет пробел в теореме 4, связанный со случаем $p = +\infty$.

Теорема 5. *Оператор* $-\overset{\circ}{\mathcal{A}}_{\infty,k}$ *порождает сильно непрерывную полугруппу в* $C_k^0(R^n)^l$. *При подходящем выборе чисел* $\nu, T > 0$ *справедливо представление*

$$e^{-t\overset{\circ}{\mathcal{A}}_{\infty,k}} = J(t) + (J * \Phi)(t), \quad 0 < t < T,$$

где оператор-функция $\Phi(t)$ *удовлетворяет оценке*

$$\|\Phi(t)\|_{C_k^0(R^n)^l \to C_k^0(R^n)^l} \leq Mt^{-\kappa}, \quad 0 < t < T, \, \kappa \in (0,1).$$

Если $X \subset S$, *то оператор* $\overset{\circ}{\mathcal{A}}_{\infty,k}$ *порождает аналитическую полугруппу* $e^{-z\overset{\circ}{\mathcal{A}}_{\infty,k}}, z \in S'$ *и верно представление*

$$e^{-z\overset{\circ}{\mathcal{A}}_{\infty,k}} = J(z) + \int\limits_0^z J(z-\omega)\Phi(\omega) d\omega, \, z \in S', \, 0 < |z| < T,$$

где интеграл берется по прямолинейному отрезку. Имеет место оценка

$$\|\Phi(z)\|_{C_k^0(R^n)^l \to C_k^0(R^n)^l} \le M|z|^{-\kappa}, \quad z \in S',\, 0 < |z| < T,$$

где $\kappa \in (0,1)$.

В §1.4 нами найдены условия компактности полугруппы $e^{-t\mathcal{A}_{p,k}}$ в пространстве $\mathcal{H}_{p,k}$, $1 \le p < +\infty$.

Пусть выполнено условие

$$\lim_{x \to \infty} a'(x,s) = +\infty, \tag{7}$$

равномерно по $s \in R^n$. Тогда оператор

$$(\mathcal{A}_{p,k} + \lambda E)^{-1} : \mathcal{H}_{p,k} \to \mathcal{H}_{p,k}, \quad 1 \le p < +\infty, \tag{8}$$

является вполне непрерывным оператором при достаточно больших $Re\,\lambda \ge \lambda_0 > 0$.

В случае самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ нами получена асимптотическая формула также и для взвешенного следа, при этом оператор $\mathcal{A}$ вообще говоря, может не иметь компактную резольвенту.

Обозначим через $N(\lambda), \lambda > 0$ число с.з. оператора $\mathcal{A}_{p,k}$, расположенных в полуплоскости $Re\,z < \lambda$, с учетом их алгебраических кратностей.

Введем в рассмотрение функцию

$$\rho(\lambda) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} \int\limits_{R^n} \rho'(x,s;\lambda) dx ds,$$

где $\rho'(x,s;\lambda)$ обозначает число с.з. матрицы $Re\,a(x,s)$, не превосходящих λ с учетом их кратностей.

Предположим, что выполнены условия (1)-(5), (7). Пусть найдется число $\delta > 0$ такое, что

$$a'(x,s) \ge c(1+|x|)^{\delta}, \tag{9}$$

и

$$\rho(\lambda) \sim \tilde{\rho}(\lambda), \quad \lambda \to +\infty, \tag{10}$$

где $\tilde{\rho}(\lambda) \in C^1(R^+)$ - некоторая неубывающая функция такая, что

$$|(\tilde{\rho}(\lambda))'_{\lambda}| \le M\tilde{\rho}(\lambda).$$

Далее предположим, что

$$\lim_{x \to +\infty} |(Im\,a(x,s))(Re\,a(x,s))^{-1}| = 0 \tag{11}$$

равномерно по $s \in R^n$.

Имеет место следующая

Теорема 6. *При выполнении перечисленных условий справедлива асимптотическая формула*

$$N(\lambda) \sim \rho(\lambda), \quad \lambda \to +\infty.$$

Замечание. В случае $p = 2$, для справедливости утверждения теоремы, условие (3) является излишним.

В §1.5 исследованы п.д.о. на компактных n-мерных C^∞-многообразиях M без края и для них установлены аналог результатов, сформулированных в теоремах 1-5. При этом рассматривается случай $k(x) \equiv 1$, а роль пространства $C_k^0(R^n)^l$ играет пространство $\mathbf{C}(M)^l$.

Во **второй главе,** состоящей из семи параграфов, исследуются спектральные свойства несамосопряженного эллиптического оператора A в пространстве $\mathcal{H}^l = L_2(0,1)^l$, ассоциированного с некоэрцитивной билинейной формой.

Рассмотрены такие вопросы, как полнота системы корневых вектор-функций оператора A в $\mathcal{H}^l$, суммируемость методом Абеля со скобками рядов Фурье элементов $f \in \mathcal{H}^l$ по системе корневых вектор-функций оператора A, оценка резольвенты оператора A, асимптотическое распределение собственных значений оператора A.

С помощью резольвентной оценки изучены свойства разрешимости неоднородных граничных задач.

Спектральная асимптотика вырождающихся эллиптических операторов далеких от самосопряженных, изучалась во многих работах [1-6](см.сноску на стр.15) в ситуации, когда собственные значения оператора делятся на две серии, одна из которых лежит вне угла $|arg\, z| \leq \varphi$, $\varphi < \pi$, а другая локализуется к лучу R_+. Эта глава примыкает к работам [1], [2], [6], в которых наиболее общие результаты получены в работе [6], где предполагается, что старший коэффициент

$$a(t) \in C^m([0,1];\, End\, \mathbf{C}^l) \tag{12}$$

имеет простые различные с.з. при каждом $t \in [0,1]$.

Нам удалось от второго условия полностью отказаться, и вместо (12), требуя лишь, что $a(t) \in C([0,1];\, End\, \mathbf{C}^l)$, обобщить в §2.1-2.3, в этой ситуации все основные результаты работы [6-8]. Результаты §2.1-2.5 примыкают к работе [7], в которой на $a(t)$ накладываются такие же условия, как в [6]. При минимальных ограничениях на $a(t) \in C([0,1]; End\,\mathbf{C}^l)$ мы обобщаем результаты работы [7]. Результаты §2.2-2.5 являются качественно новыми и даже при более слабых ограничениях на $a(t)$, как в работах ([6-8], см. сноску), в литературе не были получены. Здесь изучаются спектральные вопросы замкнутого расширения, которое задается граничными условиями, отличными от граничных условий Дирихле.

Наш метод основан на аппроксимации $a(t)$ гладкими матричными функциями $a_\delta(t)$. Однако к соответствующему оператору $\mathcal{A}_\delta$ неприменимы оценки резольвенты, установленные в ([6], см. сноску), поскольку $a_\delta(t)$ может иметь непростые с.з. Поэтому несколько параграфов главы посвящено оценке резольвенты оператора $\mathcal{A}_\delta$. При исследовании асимптотики спектра также применяется этот метод.

Оператор A, заданный в гилбертовом пространстве H, мы назовем далеким от самосопряженного, если он не приводится к виду

$$A = B(E+S), \quad B = B^*, \quad S \in \sigma_\infty(H). \tag{13}$$

Здесь и далее, символ $\sigma_\infty(H)$ обозначает класс линейных вполне непрерывных операторов в H; B^* - оператор сопряженный к B.

Спектральные свойства эллиптических дифференциальных и псевдодифференциальных операторов близких к самосопряженным, т.е. приводящихся к виду (13), в литературе достаточно подробно изучены . Также подробно исследованы спектральные свойства эллиптических д.о. и п.д.о. далеких от самосопряженных в случае, если они заданы на компактном многообразии без края . В случае областей с краями, д.о. и п.д.о. далекие от самосопряженных, начались изучатся лишь относительно недавно.

———————

[1] Бойматов К.Х. // Функциональный анализ и его приложения. 1977, т. 11, №4, с. 74-75.

[2] Бойматов К.Х., Костюченко А.Г. // Математический сборник , 1990, т. 181 , №12 , с. 1678-1693.

[3] Бойматов К.Х., Костюченко А.Г. // Вестник МГУ , 1990, №3, с. 24-31.

[4] Розенблюм Г.В. // Функционадьный анализ и его прил. 1982, т. 16, с. 82-83.

[5] Розенблюм Г.В. // В кн.: Линейные и нелинейные краевые задачи. Спектральная теория. Ленинград: Изд-во ЛГУ. 1986, с. 180-195.

[6] Agranovich M.S. and Markus A.S. // Zeitshrift fur Analysis und ihre Anwendungen, 1989, Bd.,8(3), s.237-260.

[7] К.Х. Бойматов, Седдики К. // ДАН 1997, т. 352, №3, с. 295-297.

[8] К.Х. Бойматов, Седдики К. // ДАН 1997, т.352, №4, с. 439-442.

В §2.1 приводится формулировка основных результатов.

В пространстве $L_2(0,1)^l$ рассмотрим билинейную форму

$$\mathcal{A}[u,v] = \sum_{i,j=0}^{m} \int_0^1 < p_i(t) a_{ij}(t) u^{(i)}(t), p_j(t) v^{(j)}(t) >_{\mathbf{C}^l} dt. \tag{14}$$

Здесь

$$p_i(t) = \{t(1-t)\}^{\theta+i-m} \quad (i = \overline{0,m}),\, \theta < m,\, u^{(i)}(t) = \frac{d^i u(t)}{dt^i},$$

$$a_{ij} \in L_\infty(J;\, End\,\mathbf{C}^l) \quad (i,j = \overline{0,m}),$$

где $J = (0,1)$. Символ $<\,,\,>_{\mathbf{C}^l}$ обозначает скалярное произведение в $\mathbf{C}^l$.

Обозначим через $\mathcal{H}_+$ замыкание линейного многообразия $C_0^\infty(J)$ по норме

$$|\varphi|_+ = (\int_J p_m^2(t)|\varphi^{(m)}(t)|^2 dt + \int_J |\varphi(t)|^2 dt)^{1/2}.$$

Положим:

$$\mathcal{H} = L_2(J), \quad \mathcal{H}^l = \mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H} \quad (l - \text{раз}),$$

$$\mathcal{H}_+^l = \mathcal{H}_+ \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_+ \quad (l - \text{раз}).$$

Предположим, что $a_{mm}(t) \in C^m(\bar{J};\, End\,\mathbf{C}^l)$ и матрица $a(t) \equiv a_{mm}(t)$ при каждом $t \in \bar{J}$ имеет l - различных, ненулевых собственных значений $\mu_1(t), \ldots, \mu_l(t)$. Тогда собственные значения матрицы $a(t)$ можно занумеровать так, что $\mu_j(t), \mu_j^{-1}(t) \in C^m(\bar{J})$; $j = \overline{1,l}$.

Пусть выполнены следующие условия:

$$|a_{ij}(t)| \le M t^\delta (1-t)^\delta \quad (i+j < 2m), \quad \delta > 0, \tag{15}$$

$$\mu_j(t) \notin S \qquad (j = \overline{1,l},\, t \in \bar{J}), \tag{16}$$

где $S \subset \mathbf{C}$ - некоторый замкнутый угол с началом в нуле.

При выполнении перечисленных выше условий имеют место следующие теоремы:

Теорема 7. *Существует единственный замкнутый оператор A в $\mathcal{H}^l$, обладающий следующими свойствами:*

(i) $\qquad D(A) \subset \mathcal{H}_+^l,\, (Au,v) = \mathcal{A}[u,v] \quad (\forall u \in D(A),\, v \in \mathcal{H}_+^l),$

(ii) *при некотором* $z_0 \in \mathbf{C}$ *существует непрерывный обратный*

$$(A - z_0 E)^{-1} : \mathcal{H}^l \to \mathcal{H}^l.$$

Пусть A такой же оператор, как в условиях $(i), (ii)$.

Теорема 8. *Оператор A имеет дискретный спектр. Система корневых вектор-функций оператора A полна в $\mathcal{H}^l$, т.е. их конечные линейные комбинации плотны в $\mathcal{H}^l$. Порядок резольвенты оператора A не превосходит число $\frac{1}{2m}$. Для числа $N(\lambda)$ собственных значений оператора A, не превосходящих по модулю λ, с учетом их корневых кратностей, справедлива оценка $N(\lambda) \le M\lambda^{1/2m}$, $(\lambda \ge 1)$.*

Отметим, что сформулированные выше результаты в случае симметрической формы (14) хорошо известны.

Пусть A такой же оператор, как в теоремах 7, 8.

Введем в рассмотрение оператор $\mathcal{A} : \mathcal{H}^l_+ \to \mathcal{H}^l_-$, действующий по формуле

$$< \mathcal{A}u, v >= \mathcal{A}[u, v] \qquad (\forall u, v \in \mathcal{H}^l_+).$$

Тогда имеет место следующая

Теорема 9. *Для достаточно больших по модулю $\lambda \in S$ существуют непрерывные обратные*

$$(\mathcal{A} - \lambda E)^{-1} : \mathcal{H}^l_- \to \mathcal{H}^l_-, \quad (A - \lambda E)^{-1} : \mathcal{H}^l \to \mathcal{H}^l,$$

и выполняется равенство

$$(\mathcal{A} - \lambda E)^{-1} u = (A - \lambda E)^{-1} u \qquad (\forall u \in \mathcal{H}^l).$$

При этом $Au = \mathcal{A}u \, (\forall u \in D(A))$, и

$$D(A) = \{u \in \mathcal{H}^l_+ : \mathcal{A}u \in \mathcal{H}^l\}.$$

Параграф 2.2 посвящен доказательству одной леммы о матричных функциях.

В §2.3 исследуются дифференциальные операторы с матричными коэффициентами.

Доказательства основных теорем второй главы приведены в §2.4.

В §2.5 в прежних обозначениях, для оператора А - сужение оператора $\mathcal{A}$ на $\mathcal{H}^l$ доказывается следующая

Теорема 10. *Ряд Фурье любой вектор-функции $f \in \mathcal{H}^l$ по системе корневых вектор-функций оператора A суммируется к f методом Абеля со скобками порядка $\gamma = \frac{1}{2m} + \varepsilon$ с достаточно малым $\varepsilon > 0$.*

В §2.6 исследуется асимптотическое распределение собственных значений оператора А. Пусть с.з. матрицы $a(t)$ лежат на R_+ и вне сектора

$$\Phi = \{z \in \mathbf{C} \, : \, |\, arg\, z| \leq \varphi\}, \quad 0 < \varphi < \pi.$$

Можно выбрать S в виде малого замкнутого сектора, который принадлежит

$$\{0\} \cup \{\Phi \backslash R_+\}.$$

В любом таком секторе оператор A имеет конечное число с.з. Поэтому, если обозначить через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ - последовательность с.з. оператора A, лежавших в Φ, то имеем

$$\lim_{j \to +\infty} arg\, \lambda_j \to 0.$$

Обозначим через $N(t)$ ф.р.с.з., оператор A, т.е.

$$N(t) = \sum_{|\lambda_j| \leq t} 1.$$

Имеет место следующая

Теорема 11. *Для функции $N(t)$, при $t \to +\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$N(t) \sim ct^{\frac{1}{2m}}$$

где

$$c = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^1 \rho^{-\frac{\theta}{m}}(t) \mu_j^{-\frac{1}{2m}}(t) dt$$

Результаты, полученные в §§2.2 – 2.5, мы применяем в §2.7 для исследования неоднородной задачи Дирихле

$$\mathcal{A}[u, v] - \mu(u, v) = < F, v >, \quad \forall v \in C_0^\infty(J)^l;$$

с граничными условиями

$$u^{(i)}(0) = \alpha_i, \quad u^{(i)}(1) = \beta_i, \quad i = 0, 1, ..., s_0 - 1;$$

где $s_0 \in [m - \theta - \frac{1}{2}, m - \theta + \frac{1}{2}]$ -целое число.

Найдены условия однозначной разрешимости, а также соответствующие оценки решения в которой участвуют числа α_i, β_i.

Подобные результаты до недавнего времени были известны только в случае коэрцитивных форм. Случай некоэрцитивных форм рассмотрен в работах ([6-8], см. сноску на стр. 15) при условии, что все с.з. матрицы $a(t)$ - простые и различные, причем $a(t) \in C^m$.

Мы же предполагаем лишь непрерывность старшего коэффициента.

Однородная обобщенная задача Дирихле ставится следующим образом. Для $F \in \mathcal{H}^l_-$ найти $u \in \mathcal{H}^l_+$, такой что

$$\mathcal{A}[u,v] - \mu(u,v) =< F, v >, \forall v \in C_0^\infty(J)^l \qquad (17).$$

Очевидно, что эта задача эквивалентна следующей задаче: для $F \in \mathcal{H}^l_-$ найти элемент $u \in \mathcal{H}^l_+$ такой, что

$$\mathcal{A}[u,v] - \mu(u,v) =< F, v >, \forall v \in \mathcal{H}^l_+ \qquad (18).$$

Разрешимость задачи (18) тесно связано с разрешимостью сопряженной задачи: для $G \in \mathcal{H}^l_-$ найти $u \in \mathcal{H}^l_+$ такой, что

$$\mathcal{A}^+[u,v] - \overline{\mu}(u,v) =< G, v >, \forall v \in \mathcal{H}^l_+ \qquad (19).$$

Здесь билинейная форма $\mathcal{A}^+[u,v]$ определяется по формуле

$$\mathcal{A}^+[u,v] = \sum_{i,j=0}^{m} \int_0^1 < p_i(t) a^*_{ij}(t) u^{(i)}(t), p_j(t) v^{(j)}(t) >_{C^l} dt, D[\mathcal{A}^+] = \mathcal{H}^l_+ \qquad (20).$$

Обозначим через σ спектр оператора A. Очевидно, что σ - чисто точечное множество с единственной возможной предельной точкой на бесконечности.

Имеет место следующая

Теорема 12. *При любом $\mu \notin \sigma$ задача (18) однозначно разрешима. При этом решение $u \in \mathcal{H}^l_+$ удовлетворяет неравенству,*

$$|u|_+ \le M_\mu |F|_-$$

где число M_μ не зависит от F.

Спектр σ_1 оператора A^* связан со спектром оператора А равенством $\sigma_1 = \overline{\sigma}$, т.е.,

$$\sigma_1 = \{z \in C : \overline{z} \in \sigma\}.$$

Аналогично теореме 12 имеет место следующая

Теорема 13. *Пусть $\mu \notin \sigma$. Тогда задача (19) при любом $G \in \mathcal{H}^l_-$ имеет единственное решение $u \in \mathcal{H}^l_+$. Решение $u \in \mathcal{H}^l_+$ задачи (19) удовлетворяет неравенству*

$$|u|_+ \leq M'_\mu |G|_- \quad ,$$

где число M'_μ не зависит от G.

Перейдем теперь к исследованию разрешимости задачи (18) при $\mu \in \sigma$. Будем писать $F \perp \mathcal{L}$, где $F \in \mathcal{H}^l_-, \mathcal{L} \subset \mathcal{H}^l_+$, если $< F, v >= 0, \forall v \in \mathcal{L}$.

Можно показать что, если $\mu \in \sigma$, то для существования решения задачи (18) необходимо выполнение условия

$$F \perp ker(A^* - \overline{\mu}E) \tag{21}$$

Теорема 14. *Пусть выполнено (21), $\mu \in \sigma$. Тогда задача (18) имеет решение $u \in \mathcal{H}^l_+$ такое, что*

$$|u|_+ \leq M_\mu |F|_-;$$

число M_μ не зависит от F.

Аналогично доказывается следущая

Теорема 15. *Пусть $G \perp ker(A - \mu E), \mu \in \sigma$. Тогда задача (19) имеет решение $u \in \mathcal{H}^l_+$. При этом выполняется неравенство*

$$|u|_+ \leq M'_\mu |G|_-,$$

где число M'_μ не зависит от G.

В конце этого параграфа исследуется разрешимость неоднородной задачи Дирихле. Пусть H_+ - пространство функций $y(t) \in L_2(0,1)$, с конечной нормой

$$|y|_+ = (\int_J |\rho^\theta(t) y^{(m)}(t)|^2 dt + \int_J |y(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим билинейную форму

$$\mathcal{B}[u,v] = \int_J < \rho^\theta(t) a(t) u^{(m)}(t), \rho^\theta(t) v^{(m)}(t) >_{C^l} dt, \mathcal{D}[\mathcal{B}] = H^l_+, \tag{22}$$

где $a(t) \in C^m(\overline{J}; EndC^l)$. Предполагается, что матрица $a(t) (t \in \overline{J})$ имеет простые с.з. расположенные вне некоторого замкнутого сектора S с началом в нуле. Наряду с формой (22) будем рассматривать также форму

$$\mathcal{A}'[u,v] = \int_J < \rho^\theta(t) a^*(t) u^{(m)}(t), \rho^\theta v^{(m)}(t) >_{C^l} dt, \mathcal{D}[\mathcal{A}'] = \mathcal{H}^l_+. \tag{23}$$

Неоднородная задача Дирихле ставится следующим образом. Пусть заданы векторы $\alpha_i, \beta_i \in C^l, i = 0, ...s_0 - 1$ где $s_0 \in [m - \theta - \frac{1}{2}, m - \theta + \frac{1}{2})$ - целое число. Для $F \in \mathcal{H}^l_-$ требуется найти элемент $u \in H^l_+$, удовлетворяющий граничным условиям

$$u^{(i)}(0) = \alpha_i, u^{(i)}(1) = \beta_i, \quad i = 0, 1, ...s_0 - 1, \tag{24}$$

и равенству

$$\mathcal{B}[u, v] - \mu(u, v) =< F, v >, \quad \forall v \in C_0^\infty(J)^l \tag{25}$$

Пусть A - такой же оператор, как в теореме 7, построенный в соответствии с билинейной формой $\mathcal{A}'[u, v] \quad (23)$. Обозначим через σ спектр оператора A.

Имеет место следующая

Теорема 16. *Пусть $\mu \notin \sigma$. Тогда задача (24), (25) имеет единственное решение $u \in H^l_+$ причем*

$$|u|_+ \le M_\mu(|F|_- + \sum_{i=0}^{s_0-1} |\alpha_i|_{C^l} + \sum_{i=0}^{s_0-1} |\beta_i|_{C^l}), \tag{26}$$

где число M_μ не зависит от $F, \alpha_i, \beta_i (i = \overline{0, k})$.

Аналогично с привлечением теоремы 13 устанавливается следующая

Теорема 17. *Пусть $\mu \in \sigma, F \in \mathcal{H}^l_-$. Тогда для существования хотя бы одного решения $u \in H^l_+$ задачи (24), (25) необходимо и достаточно выполнения условия*

$$(F + \mu u_k - F_1) \perp ker(A^* - \overline{\mu} E). \tag{27}$$

При этом, если выполнено (27), то существует решение удовлетворяющее неравенству

$$|u|_+ \le M'_\mu(|F|_- + \sum_{i=0}^{k} |\alpha_i|_{C^l} + |\beta_i|_{C^l}),$$

в котором число M'_μ не зависит от $F, \alpha_i, \beta_i . (i = \overline{0, k})$.

Замечание. В (27) элемент $F_1 \in \mathcal{H}^l_-$, определяется по формуле

$$< F_1, v >= \int_J < \rho^\theta(t) a(t)(\beta_k - \alpha_k), \rho^\theta v^{(m)}(t) >_{C^l} dt, \quad v \in \mathcal{H}^l_+, \theta \in (-1/2, 1/2)$$

Третья глава, состоящая из трех параграфов, посвящена исследованию асимптотики взвешенного следа некоторых классов вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов , заданных в ограниченной области, удовлетворяющей условию конуса.

В §3.1 приводятся предварительные сведения и формулировка основного результата. Пусть $\Omega \subset R_n$ — ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса . $\mathbf{C}^l$ — l-мерное комплексное пространство.

Рассмотрим билинейную форму:

$$B[u,v] = \sum_{|\alpha|=|\beta|=j\in I} (\rho^{2\theta_j} \grave{a}_{\alpha\beta}\psi_j D^\alpha u, D^\beta v), \quad u,v \in C_0^\infty(\Omega; \mathbf{C}^l).$$

Здесь

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad |\alpha| = \sum_1^n \alpha_i \quad D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}(\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \dots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n},$$

$$I \subset \{0, 1, 2, \dots, m\} \quad m \in I, \rho(x) = dist(x, \partial\Omega), \quad |\nabla\rho(x)| \le c$$

$$(u,v) = \int (u(x), v(x))_{\mathbf{C}^l} dx$$

— скалярное произведение в $H = L_2(\Omega; \mathbf{C}^l)$.

Относительно положительных функций $\psi_j(x) (j \in I)$ предполагаем, что они дифференцируемы в $\Omega \subset R_n$ и для любого $(j \in I)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\rho(x) \le \varepsilon} \frac{|\nabla\psi_j(x)|\rho(x)}{\psi_j(x)} = 0.$$

Предполагается, что значения коэффициентов $a_{\alpha\beta}(x)$ являются $(l \times l)$ – матрицами и для всех $x, y \in \Omega, |\alpha| = |\beta| \in I$ выполняется неравенство

$$|a_{\alpha\beta}(x) - a_{\alpha\beta}(y)| \le K|x-y|^\tau \quad (K > 0, \tau \in (0,1]).$$

Пусть для всех $|\alpha| = |\beta| = j \in I, x \in \Omega$, выполняется неравенство

$$\sum_{|\alpha|=j} |\zeta_\alpha|^2_{\mathbf{C}^l} \le M \sum_{|\alpha|=|\beta|=j} < a_{\alpha\beta}(x)\zeta_\alpha, \zeta_\beta >_{\mathbf{C}^l},$$

где число M>0 не зависит от $x \in \Omega, \{\zeta_\alpha\} \subset \mathbf{C}^l$.

Числа $\theta_j (j \in I)$ принадлежат интервалу [0;+∞) и удовлетворяют условиям:

I. $\max\limits_{j\in I}(j - \theta_j) > 0$;

II. если j>k, (j, k$\in I$), то $k - \theta_k > j - \theta_j$.

Обозначим через H_+ замыкание $C_0^\infty(\Omega; \mathbf{C}^l)$ по норме

$$|u|_+ = \sqrt{B[u,u] + |u|^2}.$$

Так как билинейная форма B[. , .] положительно определена, то пространство H_+ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u,v)^+ = B[u,v] + (u,v).$$

В сделанных выше предположениях билинейная форма $B[u,v](u,v \in H_+)$ однозначно определяет положительный самосопряженный оператор A в пространстве H со следующими свойствами :

$$D(A^{\frac{1}{2}}) = H_+; \quad B[u,v] = (A^{\frac{1}{2}}u, A^{\frac{1}{2}}v)$$

для всех $u,v \in D(A^{\frac{1}{2}})$, причем если $u \in D(A)$, то $B[u,v] = (Au,v)$.

Обозначим через $V_\chi(\Omega)$, где $\chi \geq 0$, класс положительных функций $l \in C^1(\Omega)$, удовлетворяющих неравенству:

$$|\nabla l(x)| \leq \chi l(x) \rho^{-1}(x)$$

для всех $x \in \Omega$.

Определим функцию $\varphi_l(\lambda) \quad (\lambda \in R_1^+, l \in V_\chi(\Omega))$ равенством

$$\varphi_l(\lambda) = (2\pi)^{-n} \int\limits_\Omega l(x) (\int\limits_{R_n} N(\lambda,x,s) ds) dx,$$

где $N(\lambda,x,s)$ — число собственных значений, не больше чем λ матрицы

$$A(x,s) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=j \in I} \rho^{2\theta_j}(x) \psi_j(x) a_{\alpha\beta}(x) s^{\alpha+\beta}.$$

Обозначим через $\{\hat{\mathrm{E}}_\lambda\}$ спектральные проекторы оператора A, через l — оператор умножения на функцию $l(x) \in V_\chi(\Omega)$ в пространстве H.

Положим, $N(\lambda,l) = sp\mathrm{E}_{\lambda,l}$, где $\mathrm{E}_{\lambda,l} = \sqrt{l}\hat{\mathrm{E}}_\lambda\sqrt{l}$.

Имеет место следующая

Теорема 18. *Пусть выполнены сформулированные выше условия и* $m < \theta_m \cdot n$. *Тогда найдется число* $\chi_0 > 0$ *такое, что для* $l \in V_\chi(\Omega)$, *где* $\chi \in [0, \chi_0]$, *оператор* $E_{\lambda,l}(\lambda \in R_1^+)$ *является ядерным. Если при этом выполняется равенство* $\varphi_l(\lambda) = O(1) f_l(\lambda)$, *где функция* $f_l(\lambda)$ *не убывает и удовлетворяет условию* $f_l(2\lambda) = O(f_l(\lambda)), \quad (\lambda \to \infty)$, *то существует число* $\mu \in (0,1)$ *такое, что для любого числа* $\delta \in (\mu, 1)$ *имеет место* *неравенство:*

$$|N(\lambda,1)-\varphi_l(\lambda)| \le M\lambda^{\mu-\delta}f_l(\lambda)+\sup_{|\lambda-t|<\frac{1+\lambda}{2}}(\varphi_l(t+t^{\delta})-\varphi_l(t)).$$

Пример 2. Рассмотрим билинейную форму

$$B[u,v]=\int\limits_a^b \rho^{4+\varepsilon}(x)p_1(x)u''(x)\overline{v''(x)}dx+\int\limits_a^b \rho^{-2\varepsilon}(x)p_2(x)u(x)\overline{v(x)}dx$$

Здесь $\varepsilon>0, p_1(x), p_2(x)$ - некоторые функции класса Гельдера, ограниченные снизу и сверху постоянными положительными числами. Согласно теореме 18, оператор A порожденный этой билинейной формой , имеет дискретный спектр и для функции $N(\lambda)$ распределения собственных значений оператора A справедлива асимптотическая формула

$$N(\lambda)\sim(2\pi)^{-1}\int\limits_a^b(\frac{(\lambda-\widetilde{p_2}(x))_+}{\widetilde{p_1}(x)})^{\frac{1}{4}}dx$$

где

$$\widetilde{p_1}(x)=\rho^{4+\varepsilon}p_1(x),\quad \widetilde{p_2}(x)=\rho^{-2\varepsilon}(x)p_2(x)$$

$$p_+=max(p,0)$$

В §3.2 приведены некоторые вспомогательные леммы, необходимые для дальнейшего исследования. Доказательство основной теоремы приведено в §3.3.

Четвертая глава, состоящая из шести параграфов, посвящена исследованию асимптотики спектра несамосопряженных вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов второго порядка на отрезке, а также исследованию спектральных свойств одного класса эллиптических систем дифференциальных операторов в многомерной области.

Формулировка основных результатов приведена в §4.1.

Пусть $h(t)\in C^1(0,1)$ - положительная функция. Введем пространство:

$$\mathcal{H}_l=W^1_{2,h}(0,1)^l=W^1_{2,h}(0,1)\times...\times W^1_{2,h}(0,1),\quad (l-\text{раз})$$

состоящее из вектор-функции $u(t) = (u_1(t), ..., u_l(t))$ определенных на (0,1) с конечной нормой

$$|u|_+ = (\int_0^1 h(t)|\frac{du}{dt}|^2 dt + \int_0^1 |u(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $\mathcal{H}_l^0$ замыкание $C_0^\infty(0,1)^l$ в соответствии с этой нормой. Если $l = 1$, то положим $\mathcal{H} = \mathcal{H}_l$ и $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}_1^0$

Рассмотрим в пространстве $H_l = L_2(0,1)^l$ дифференциальный оператор

$$(Pu)(t) = -\frac{d}{dt}(h(t)R(t)\frac{du}{dt}) \tag{28}$$

с областью определения

$$D(P) = \{u \in \mathcal{H}_l^0 \cap W_{2,loc}^2(0,1)^l : \frac{d}{dt}(h(t)R(t)\frac{du}{dt}) \in \mathcal{H}_l\}$$

Здесь $W_{2,loc}^2(0,1)^l = W_{2,loc}^2(0,1) \times ... \times W_{2,loc}^2(0,1), \quad (l-$раз), а $W_{2,loc}^2(0,1)$ обозначает класс функции $u(t), \quad (0 < t < 1)$, такие что

$$\sum_{i=0}^{2} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} |u^{(i)}(t)|^2 dt < +\infty, \quad \forall \varepsilon \in (0, 1/2).$$

Пусть функция $h(t)$ удволетворяет следующим неравенствам:

$$c_1 t^\alpha (1-t)^\beta \leq h(t) \leq M, \tag{29}$$

$$|h^{'}(t)| \leq ct^{\alpha/2-1+\varepsilon_1}(1-t)^{\beta/2-1+\varepsilon_2}, \tag{30}$$

где $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$. Число $\varepsilon_1 = 0$, если $\alpha \neq 0$, и $\varepsilon_1 > 0$, если $\alpha = 1$.

Число $\varepsilon_2 = 0$, если $\beta \neq 1$, и $\varepsilon_2 > 0$, если $\beta = 1$.

Относительно $R(t)$ предполагаем, что

$$R(t) \in C^1([0,1], End\mathbf{C}^l),$$

и при каждом $t \in [0,1]$ матрица $R(t)$ имеет простые ненулевые корни.

Итак, пусть для $h(t), R(t)$ выполнены все условия, сформулированные выше, и существует замкнутый сектор $S \subset \mathbf{C}$ с вершиной в нуле, свободный от собственных значений матрицы $R(t), \quad (0 < t < 1)$.

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 19. *Для достаточно больших модулей* $\lambda \in S$ *оператор* $(P - \lambda E)$ *имеет непрерывный обратный* $(P - \lambda E)^{-1}$ *в* $\mathcal{H}_l$ *и справедливы оценки*

$$||(P - \lambda E)^{-1}|| \leq M|\lambda|^{-1},$$

$$||h^{1/2}\frac{d}{dt}(P - \lambda E)^{-1}|| \leq M|\lambda|^{1/2}, \quad (\lambda \in S, |\lambda| > c)$$

.

Здесь символ $|| \quad ||$ обозначает норму ограниченного оператора из $\mathcal{H}_l$ в $\mathcal{H}_l$ или из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_1$.

Теорема 20. *Пусть* $0 \leq \alpha < 2, 0 \leq \beta < 2$. *Тогда для достаточно больших по модулю* $\lambda \in S$ *оператор* $(P - \lambda E)^{-1}$ *является компактным оператором, порядка которого не привосходит числа* $\frac{1}{2}$. *Спектр оператора* P *состоит из изолированных собственных значений конечных алгебраических кратностей с единственной возможной предельной точкой на бесконечности. Система корневых вектор-функции оператора* P *полна в пространстве* $\mathcal{H}_l$. *Ряд Фурье любой вектор-функции* $f \in \mathcal{H}_l$ *по системе корневых вектор-функций оператора* P *суммируется к* f *методом Абеля со скобками порядка* $\gamma = \frac{1}{2} + \varepsilon$ *с достаточно малым* $\varepsilon > 0$.
Для числа $\widetilde{N}(t)$ *собственных значений оператора* P *не превосходящих числа* t *(с учетом их алгебраических кратностей) справедлива оценка*

$$\widetilde{N}(t) \leq M(1+t)^{\frac{1}{2}}.$$

Сформулируем теперь результат об асимптотике спектра оператора P. Так как $R(t) \in C^1([0,1], End\,\mathbf{C}^l)$, и то что все собственные значения $\mu_1(t), \ldots, \mu_l(t)$ матрицы $R(t)$ простые, то их всегда можно так занумеровать, что $\mu_j(t) \in C^1[0,1], j = 1, \ldots, l$.
Мы предположим, что $\mu_1(t), ..., \mu_\nu(t) \in R_+, \mu_{\nu+1}(t), ..., \mu_l(t) \in C \setminus \Phi$, где $\Phi = \{z \in C : |argz| \leq \varphi\}, \varphi \in (0, \pi)$, а R_+ обозначает положительную полуось $R_+ = \{z \in C : Rez > 0, Imz = 0\}$. Здесь и далее функция $argz$ принимает значение на отрезке $(-\pi, \pi]$.
Предположим, что функция $h(t)$ удовлетворяет следующим условиям

$$h(t) \geq c' t^\beta (1-t)^\beta, c' > 0, \beta < 2,$$

$$h(t) + |\frac{dh(t)}{dt}| \leq Mt^{-k}(1-t)^{-k}, k > 0.$$

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, ...$ последовательность собственных значений оператора P, расположенных в угле Φ и занумерованных с учетом их алгебраических кратностей.

Обозначим

$$\Lambda = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{v} \int_0^1 h^{-\frac{1}{2}}(t) \mu_j^{-\frac{1}{2}}(t) dt.$$

Теорема 21. *Для фунции $N(t) = card\{j; |\lambda_j| \leq t\}$ справедлива асимптотическая формула*

$$N(t) \sim \Lambda t^{\frac{1}{2}}, \quad t \to +\infty.$$

При этом имеем

$$\lim_{j \to +\infty} arg \lambda_j = 0.$$

Доказательство теоремы 19-21 основаны на некоторых оценках резольвенты оператора A. Эти оценки приведены в $\S 4.2 - \S 4.4$.

В $\S 4.5$ исследуется спектральная асимптотика дифференциальных операторов при общих граничных условиях.

Рассмотрим в H_l дифференциальный оператор:

$$P_0 = -\frac{d}{dt}(h(t)R(t)\frac{d}{dt}), \quad D(P_0) = C_0^\infty(0,1)^l$$

Предполагается, что $h(t), R(t)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 21, однако, в отличие от параграфа 4.1 здесь будут рассмотрены другие расширения оператора P, которые необязательно могут быть заданы граничным условием типа Дирихле.

Пусть Φ - такой же угол как и в теореме 21, $\quad \mu_j(t) \in C^1[0,1]$ – собственные значения матрицы $R(t)$, $\mu_1(t), ..., \mu_\nu(t) \in R_+, \mu_{\nu+1}(t), ..., \mu_l(t) \notin \Phi$.

Пусть P – замкнутое расширение в H_l оператора P_0 такое, что:

1). Любой замкнутый сектор $S \subset \Phi$ с вершиной в нуле такой, что $S \cap R_+$содержит конечное число собственных значений оператора P.

2). Найдутся числа $\varepsilon > 1/2, \quad \psi \in (0, \varphi), \quad c > 0$ такие, что оператор $P - \lambda E$ непрерывно обратим при $|\lambda| > c, \arg\lambda = \pm\psi$ и удовлетворяет оценке

$||(P - \lambda E)^{-1}|| \leq M|\lambda|^{-\varepsilon}, (|\lambda| > c, \arg\lambda = \pm\psi).$

При выполнении сформулированных выше условий имеет место следующая

Теорема 22. *Для числа $N(t)$собственных значений оператора P, расположенных в угле Φ и не превосходящих по модулю t справедлива асимптотическая формула:*

$$N(t) \sim ct^{1/2},$$

где

$$c = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\nu} \int_{0}^{1} h^{-\frac{1}{2}}(t) \mu_j^{-\frac{1}{2}}(t) dt$$

В §4.6 исследуются некоторые спектральные свойства одного класса несамосопряженных эллиптических систем.

Пусть $\Omega \subset R^n$ - ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. В гильбертовом пространстве $H_l = L_2(\Omega)^l = L_2(\Omega) \times ... \times L_2(\Omega)$ (l - раз), (в случае $l = 1$ положим $H_l = H$) рассматривается дифференциальный оператор

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho^{2\theta}(x) a_{ij}(x) q(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}),$$

при граничных условиях типа Дирихле. Относительно параметра вырождения θ полагаем, что $0 \leq \theta \leq 1$. Функция $\rho(x)$ означает регуляризованное расстояние до границы области:

$\rho(x) \in C^\infty(\Omega), \quad \rho(x) \leq dist\{x, \partial\Omega\} \leq M\rho(x), \quad |\rho'(x)| \leq M.$

Сформулируем условия для коэффициентов $q(x), a_{ij}(x) \quad (i, j = \overline{1, n})$.

Предположим, что

$$a_{ij}(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad q(x) \in C^2(\overline{\Omega} : End\mathbb{C}^l).$$

$$a_{ij}(x) = \overline{a_{ji}(x)}, \quad (x \in \Omega, \quad i, j = \overline{1, n}).$$

Кроме того, предположим выполнение условия эллиптичности:

$$c|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \overline{\xi_j} \quad (x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{C}^n), c > 0.$$

Собственные значения матрицы $q(x) \quad (x \in \overline{\Omega})$ расположены на положительной полуоси $R_+ \equiv (0; +\infty)$ и вне угла

$$\Phi = \{z \in \mathbb{C} : |argz| \leq \varphi\}, \quad \varphi \in (0, \pi] :$$

(Функция $argz$ принимает значение на $(-\pi, \pi])$.

Введем пространство $W^1_{2,\theta}(\Omega)$ функций $y(x)(x \in \Omega)$ с конечной нормой

$$||y, W^1_{2,\theta}(\Omega)|| = (\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \rho^{2\theta}(x)|y'_{x_i}(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |y(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}.$$

В дальнейшем предположим, что матрица $q(x)$ при $x \in \partial\Omega$ имеет простые собственные значения.

Пусть $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\theta}(\Omega)$ - замыкание линейного многообразия $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $W^1_{2,\theta}(\Omega)$. За областью определения оператора A примем класс вектор - функций $u(x) \in H_l$ с компонентами класса $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\theta}(\Omega) \cap W^2_{2,loc}(\Omega)$ такие, что

$$\sum_{i,j=1}^{n} (\rho^{2\theta} a_{ij} q u'_{x_i})'_{x_j} \in H_l.$$

Занумеруем собственные значения $\mu_1, ..., \mu_l$ матрицы $q(x)$ так, что $\mu_j(x) \in C(\overline{\Omega}), (j = \overline{1, l})$ и

$$\mu_j(x) \in R_+, \text{ т.е. } arg\mu_j(x) \equiv 0, \quad (j = \overline{1, \nu}), \quad \mu_j(x) \overline{\in} \Phi \quad (j = \nu + 1, .., l).$$

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, ...$ последовательность собственных значений оператора A из угла Φ, упорядоченных в порядке неубывания их модулей.

Положим

$$N(t) = card\{j : |\lambda_j| \leq t\}, \quad t > 0$$

При выполнении перечисленных условий имеет место следующая

Теорема 23 . *Для любого замкнутого сектора $S \subset \Phi \setminus R_+$ с вершиной в нуле для достаточно больших по модулю $\lambda \in S$ оператор $A - \lambda E$ непрерыно обратим и верна оценка*

$$||(A - \lambda E)^{-1}|| \leq M_S |\lambda|^{-1} \quad (\lambda \in S, |\lambda| \geq M'_S).$$

Имеет место асимтотическая формула

$$N(t) \sim (2\pi)^{-n} v_n t^{\frac{n}{2}} \int\limits_{\Omega} \rho^{-n\theta}(x)\mu(x)(det(a(x)))^{-1/2}dx,$$

где v_n *- объем единичного шара в* R^n,

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^{\nu} \mu_i^{-\frac{n}{2}}(x), \quad a(x) = (a_{kl}(x))_{k,l=1}^{n}.$$

При этом

$$\lim_{j\to+\infty} arg\lambda_j = 0.$$

Автор выражает глубокую признательность научным консультантам, академику АН Респ. Таджикистан, д.ф.-м.н., профессору Камолиддину Хамроевичу Бойматову и д.ф.-м.н., профессору Ивану Егоровичу Егорову за внимание и поддержку на всех этапах работы над диссертацией.

Публикации по теме диссертации

[1]. Гадоев М. Г. Спектральная асимптотика вырождающихся эллиптических систем дифференциальных операторов // Доклады АН Тадж. ССР, 1990 , т.33, №1, с.6-9.

[2]. Исхоков С.А., Гадоев М.Г. Об одном неравенстве типа Харди для ограниченных областей, удовлетворяющих условию конуса // Докл. АН Таджикской ССР. 1991, т. 34, №3, с. 146-151.

[3]. Бойматов К.Х., Гадоев М.Г. Неравенство типа Харди для областей, удовлетворяющих условию конуса // В кн.: Спектральная теория операторов и ее приложения. Баку, 1991 , вып.10, с.58-63

[4]. Бобокалонова Д.Ф., Гадоев М.Г. Спектральная асимптотика несамосопряженных эллиптических систем дифференциальных операторов во всем пространстве // Доклады АН Республики Таджикистан. 1993 г. т. 36, №1 с. 5-9

[5]. Гадоев М.Г., Олимов М. Асимптотика взвешенного следа эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка в предельно-цилиндрической области // В сб.: Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения. Вып.2, Душанбе, 1993, с.12-15.

[6]. Гадоев М.Г., Олимов М. Об асимптотике спектра несамосопряженных систем дифференциальных операторов в предельно-цилиндрических областях // Доклады АН Республики Таджикистан. 1993 , т. 36, №2, с. 79-82.

[7]. Гадоев М.Г., Олимов М. О спектре вырожденно-эллиптических операторов в неограниченных областях // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения (сборник научных статей), вып 3. Душанбе, 1995, с.17-20.

[8]. Гадоев М.Г., Каримов О. Коэрцитивные свойства нелинейных эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка //Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения (сборник научных статей) вып.4 Душанбе, 1996, с.19-22.

[9]. Гадоев М.Г., Аликулов Р.К. Неравенства для функций Грина эллиптических уравнений и их приложения к проблеме разделимости // Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения.(сборник научных статей), вып.4, Душанбе, 1996, с. 6-11.

[10]. Гадоев М.Г. Асимптотика взвешенного следа вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // Материалы международной научной конференции

по "Дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами"Душанбе, 17-19 ноября 1996 г, с. 43.

[11]. Гадоев М.Г. Асимптотика взвешенного следа вырождающихся дифференциальных операторов // Математические заметки ЯГУ, 1997, с.17-27.

[12]. Гадоев М.Г. Спектральная асимптотика одного класса m-секториальных вырожденно-эллиптических операторов на отрезке // Материалы II международной конференции по математическому моделированию,Якутск, 1997, с 17-18.

[13]. Бобокалонова Д.Ф., Гадоев М.Г. Спектральная асимптотика m-секториальных дифференциальных операторов II порядка в неограниченных областях, удовлетворяющих условию конуса// Доклады АН Республики Таджикистан. Душанбе. 1998 г. т.41. №9, стр.5-12.

[14]. Гадоев М.Г. Спектральная асимптотика несамосопряженных эллиптических систем второго порядка, слабо вырождающихся на границе области// Доклады АН Республики Таджикистан. Душанбе 1999, т.42, №3. с.54-59.

[15]. Гадоев М.Г. Спектральная асимптотика задачи Неймана для вырожденно-эллиптических дифференциальных уравнений четвертого порядка // Материалы IV-го Сибирского Конгресса по прикладной и индустриальной математике, ИНПРИМ-2000, Новосибирск, 2000, с.48-49.

[16]. Гадоев М.Г. Интегральное представление голоморфных полугрупп, порожденных сильно позитивными матричными псевдодифференциальными операторами на компактных многообразиях // Доклады РАН , 2002 , т.385, №4, с. 450-452.

[17]. Бойматов К.Х. , Гадоев М.Г. Об условиях m-секториальности и квази-m-аккретивности минимальных реализаций матричных дифференциальных и псевдодифференциальных выражений // Доклады РАН, 2002, т.385, №3, с.295-298

[18]. Гадоев М.Г. Об асимптотике спектра одного класса несамосопряженных эллиптических дифференциальных операторов вырождающихся на компактное многообразие произвольной коразмерности // Материалы Междун. Российско-Узбекского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики", Нальчик, 2003, с. 38-39.

[19]. Гадоев М.Г., Конобулов С.И. О связи между свойствами разделимости дифференциальных выражений и коэрцитивных оценок дифференциальных

уравнений. // Труды международной конференции по дифференциальным и интегральным уравниям с сингулярными коэффициентами Душанбе 23-25 октября 2003 г. стр. 54-56.

[20]. Гадоев М.Г., Конобулов С.И. Коэрцитивная разрешимость и разделимость эллиптических систем второго порядка в банаховых пространствах //Вестник НГУ, 2003, т.3,№3, стр. 15-33.

[21]. Гадоев М.Г., Конобулов С.И. Коэрцитивная разрешимость позитивных эллиптических операторов в банаховых пространствах //Сибирский журнал индустриальной математики, 2003, т.6,№2 (14), стр. 26-30.

[22]. Гадоев М.Г., Конобулов С.И. Об условиях позитивности и коэрцитивной разрешимости матричного оператора Шредингера в банаховых пространствах вектор-функций // Дифференциальные уравнения, 2003, т.39, №6, с.850-851.

[23]. Бойматов К.Х., Егоров И.Е., Гадоев М.Г. Интегральное представление сильно непрерывных полугрупп, порожденных системами псевдодифференциальных операторов. //Материалы четвертой международной конференции по математическому моделированию, Якутск, 27-31 июля 2004 г., с. 9-10.

[24]. Гадоев М.Г. Асимптотика спектра несамосопряженных вырождающихся эллиптических операторов // Материалы научно-практ. конф. посвященной 50-ти летию алмазодобывающей промышленности и г. Мирного (г.Мирный, 12-13 апреля 2005 г.) стр.151-157.

[25].Бойматов К.Х., Егоров И.Е., Гадоев М.Г. Об асимптотике спектра одного класса несамосопряженных ПДО во всем пространстве // Тезисы докладов Междунар.конф. "Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ"посвященной столетию академика С.М. Никольского (г.Москва, 23-29 мая 2005 г.) стр.57.

[26]. Бойматов К.Х., Егоров И.Е., Гадоев М.Г. C_0 *- полугруппы операторов, порожденные системами псевдодифференциальных операторов в* L_p *- пространствах с весом // Доклады РАН , 2005 , т.404, №2, стр. 151-154.*

[27]. Гадоев М.Г. Асимптотика спектра несамосопряженных вырожденно-эллиптических дифференциальных операторов второго порядка на отрезке // Сибирский журнал индустриальной математики, 2006, т.9, №2(26),стр. 31-43.

[28]. Гадоев М.Г. Об асимптотике спектра одного класса несамосопряженных систем

// Неклассические уравнения математической физики,Новосибирск, ИМ СО РАН, 2007г. стр. 78-84

[29]. Гадоев М.Г. Обобщенная задача Дирихле для систем вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов, ассоциированных с некоэрцитивными формами // Материалы междунар. конф. "Дифференциальные уравнения, функциональные пространства, теория приближений"посвященной 100-летию со дня рождения акад. С.Л. Соболева, Новосибирск, 2008, стр. 119.