На правах рукописи

Казаков Алексей Юрьевич

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О СОПРЯЖЕННЫХ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ТЕЧЕНИЯХ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2009

Работа выполнена в Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Макаренко Н. И.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Налимов В. И.
	доктор физико-математических наук, профессор Фокин М. В.
Ведущая организация:	Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

Защита состоится 8 декабря 2009 г. в 11 ч. 00 мин. на заседании Диссертационного совета Д 212.174.02 при Новосибирском государственном университете по адресу: 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного университета.

Автореферат разослан 6 ноября 2009 г.

Учёный секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук Макаренко Н.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В диссертации исследуется нелинейная задача на собственные значения для одномерного варианта уравнения Дюбрей–Жакотэн — Лонга. Указанное квазилинейное эллиптическое уравнение второго порядка возникает в теории двумерных установившихся волн в неоднородной жидкости. Рассматриваемая задача тесно связана с проблемой аналитического описания предельных форм внутренних стационарных волн — уединенных волн типа плато (рис. 1а). Волны типа плато имеют фронты, подобные плавным внутренним борам (рис. 1б), и почти одномерные горизонтальные срединные течения, *сопряженные* с невозмущенным течением перед волной. Два одномерных течения стратифицирован-

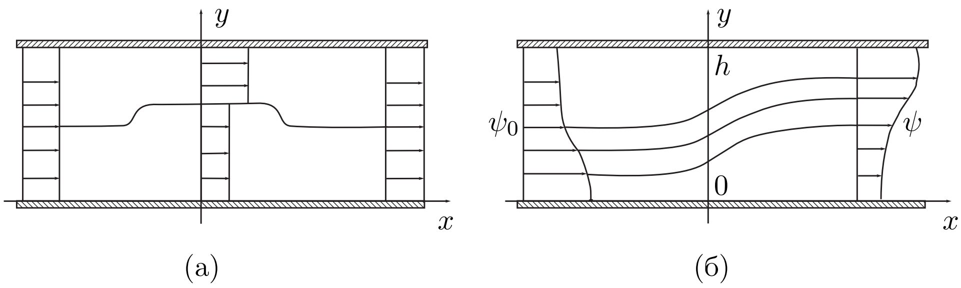

Рис. 1: (а) - уединенная волна типа плато, (б) - плавный бор

ной жидкости называются сопряженными, если они являются согласованными в смысле законов сохранения массы, импульса и (или) энергии. Предельные амплитуды внутренних уединенных волн задаются параметрами сопряженных течений, для которых выполнены все три указанных закона сохранения. Понятие сопряженного течения, а также постановка задачи об отыскании пар сопряженных течений как бифуркационной задачи для уравнения Дюбрей–Жакотэн — Лонга и первые результаты о ее разрешимости принадлежат Бенджамину [1]. По своей формулировке указанная задача относится к классу нелинейных задач Штурма — Лиувилля [2]. Такие задачи возникают в нелинейной теории теплопроводности и теории упругости, теории фазовых переходов, а также при исследовании задач сегментации фотоизображений и нахождении точных констант в изопериметрических неравенствах. Поэтому тема диссертации актуальна с точки зрения общей теории нелинейных дифференциальных уравнений.

Цель работы — получение необходимых и достаточных условий разрешимости задачи о сопряженных течениях в терминах коэффициентов уравнения Дюбрей–Жакотэн — Лонга, задающих профиль плотности жидкости и сдвиг скорости в невозмущенном потоке.

Методы исследования. В диссертации используются методы теории ветвления решений нелинейных дифференциальных уравнений [3]. Основные результаты получены путем анализа уравнений разветвления Ляпунова — Шмидта, при этом существенную роль играют вариационные свойства рассматриваемой задачи.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми, их достоверность устанавливается строгими математическими доказательствами.

Теоретическая и практическая ценность. В диссертации рассматривается задача о бифуркациях решений уравнения Дюбрей–Жакотэн — Лонга, удовлетворяющих дополнительному интегральному соотношению (закон сохранения импульса), выраженному в терминах лагранжиана исходного уравнения. В работе получены необходимое и достаточное условия существования нетривиальной ветви решений указанной задачи. Аналогичное необходимое условие разрешимости сформулировано и обосновано для класса нелинейных операторов Штурма — Лиувилля общего вида. С точки зрения приложений в гидродинамике полученные условия характеризуют профили плотности и скорости в слое стратифицированной жидкости, для которых могут реализовываться режимы движения в виде волн типа плато.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на следующих конференциях:

1. XLI Международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс», Новосибирск, 2003.

2. VII Международная конференция «Потоки и структуры в жидкостях», Санкт-Петербург, 2003.

3. Всероссийская конференция «Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение», приуроченная к 85-летию академика Л. В. Овсянникова, Новосибирск, 2004.

4. Всероссийская конференция «Проблемы механики сплошных сред и физики взрыва», посвященная 50-летию Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, 2007.

5. Ассамблея Европейского геофизического союза EGU General Assembly, Вена, Австрия, 2008.

6. Международная конференция «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», посвящённая 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева, Новосибирск, 2008.

Результаты диссертации обсуждались на семинаре лаборатории математического моделирования фазовых переходов Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН под руководством чл.-корр. РАН П. И. Плотникова, семинаре «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы анализа» под руководством проф. В. С. Белоносова и проф. М. В. Фокина в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН, семинаре под руководством проф. О. В. Капцова в Институте вычислительного моделирования СО РАН.

Публикации. По теме диссертационной работы автором опубликованы статьи [19, 20], труды конференций [14] и тезисы докладов [12, 13], [15]–[18]. В совместных публикациях [17, 20] автору принадлежат результаты о необходимых условиях ветвления решений задачи о сопряженных течениях.

Основные результаты диссертации.

1. Получено необходимое условие ветвления решений задачи о сопряженных течениях (теорема 1). Указанное условие формулируется в терминах собственных функций оператора Дюбрей–Жакотэн — Лонга, линеаризованного на невозмущенном решении.

2. Получено достаточное условие ветвления решений задачи о сопряженных течениях (теорема 2). Указана асимптотика ветви нетривиальных решений вблизи точки бифуркации.

3. Установлена связь между полученными условиями существования сопряженных течений и структурой асимптотического разложения для решений двумерной задачи об уединенных внутренних волнах.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и приложения. Работа изложена на 87 страницах машинописного текста, содержит 4 рисунка. Перечень литературы состоит из 64 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность исследуемой проблемы, дан обзор литературы и охарактеризовано содержание диссертационной работы.

Первая глава является вводной, в ней приводится постановка задачи об уединенных волнах и формулируется связанная с ней задача о сопряженных течениях. Кроме того, в этой главе излагаются необходимые сведения из теории ветвления, касающиеся основного метода исследования — конструкции Ляпунова — Шмидта.

Уравнение Дюбрей-Жакотэн — Лонга для функции тока $\psi(x, y)$, описывающей плоское стационарное течение неоднородной жидкости, имеет вид

$$\rho(\psi)(\psi_{xx} + \psi_{yy}) + \rho_\psi(\psi)\left(\frac{\psi_x^2 + \psi_y^2}{2} + gy\right) = B_\psi(\psi). \qquad (1)$$

Здесь функция $\rho(\psi)$ задает распределение плотности по линиям тока, $B(\psi)$ — функция Бернулли, g — ускорение силы тяжести. Функции ρ и B известны, если задано поведение течения при $x \to -\infty$.

Двумерная краевая задача для уравнения Дюбрей–Жакотэн — Лонга (1) формулируется в плоскости независимых переменных Мизеса (x, ψ) для искомой функции $w(x, \psi)$, задающей форму линий тока в виде $y = y_0(\psi) + w(x, \psi)$, где зависимость $y_0(\psi)$ соответствует невозмущенному течению с известной функцией тока $\psi = \psi_0(y)$. Для течения типа плавного бора, изображенного на рисунке 1б, функция w в полосе $\{-\infty < x < \infty, 0 < \psi < 1\}$

должна удовлетворять следующим уравнениям и граничным условиям:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
-\left(\dfrac{\rho w_\psi}{y_{0\psi}^3}\right)_\psi + \rho\left(\dfrac{w_x}{y_{0\psi}}\right)_x + \lambda\tilde{\rho}_\psi w + & (2)\\[2ex]
\quad + \left(\rho\dfrac{y_{0\psi}^3 w_x^2 + 3y_{0\psi}w_\psi^2 + 2w_\psi^3}{2y_{0\psi}^3(y_{0\psi}+w_\psi)^2}\right)_\psi + \rho\left(\dfrac{w_x w_\psi}{y_{0\psi}(y_{0\psi}+w_\psi)}\right)_x = 0, & \\[2ex]
w(x,0)=0,\ w(x,1)=0, & (3)\\
w\to 0\ \ (x\to-\infty), \quad w\to w_\infty(\psi)\ \ (x\to\infty). & (4)
\end{array}
\right.
$$

Здесь функции $\rho(\psi,\sigma) = \rho_0(y_0(\psi),\sigma)$ и $\tilde{\rho}(\psi,\sigma) = \sigma^{-1}\rho(\psi,\sigma)$ считаются заданными. Параметрами в указанной задаче являются плотностное число Фруда λ и малый параметр Буссинеска σ, характеризующий средний градиент плотности в слое слабостратифицированной жидкости. Предполагается, что функция плотности $\rho_0(Y,\sigma)$ имеет вид

$$\rho_0(Y,\sigma) = 1 + \sigma\rho_1(Y) + \sigma^2\rho_2(Y,\sigma), \tag{5}$$

где функция ρ_1, задающая фоновый профиль плотности, и функция ρ_2, характеризующая тонкую структуру стратификации, принадлежат классам гладкости

$$\rho_1(Y)\in C^4[0,1], \quad \rho_2(Y,\sigma)\in C^4([0,1]\times[0,\sigma_0]), \quad y_0(\psi)\in C^4[0,1] \tag{6}$$

и всюду в своей области определения удовлетворяют неравенствам $\rho_0>0$, $\rho_{0Y}<0$, $\rho_{1Y}<0$.

Функция $w_\infty(\psi)$ в условии (4), определяющая сопряженное течение при $x\to+\infty$, должна быть решением уравнений (2), (3). При этом она должна удовлетворять условию согласования, вытекающему из закона сохранения импульса. Это условие получается с помощью дивергентной формы записи уравнения (2), которая дается теоремой Э. Нетер в силу наличия у уравнения (2) лагранжиана, инвариантного относительно группы переносов по переменной x. С гидродинамической точки зрения данное условие согласования означает требование совпадения полных потоков импульса в основном течении с $w=0$ и в сопряженном течении с $w=w_\infty(\psi)$. Потоки массы и энергии для пары этих течений совпадают в силу сохранения плотности $\rho(\psi)$ и константы Бернулли $B(\psi)$ вдоль линий тока.

Таким образом, в задаче о сопряженных течениях требуется найти решение $w=w_\infty(\psi)$ нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее однородным граничным условиям и дополнительному интегральному соотношению

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
F(w;\lambda,\sigma) \overset{def}{=} -\left(\dfrac{\rho w_\psi}{y_{0\psi}^3}\right)_\psi + \lambda\tilde{\rho}_\psi w + \left(\rho\dfrac{3y_{0\psi}w_\psi^2 + 2w_\psi^3}{2y_{0\psi}^3(y_{0\psi}+w_\psi)^2}\right)_\psi = 0, & (7)\\[2ex]
\displaystyle\int_0^1 L(w,w_\psi;\lambda,\sigma)\,d\psi \overset{def}{=} \int_0^1\left(\dfrac{\rho w_\psi^2}{2y_{0\psi}^2(y_{0\psi}+w_\psi)} + \dfrac{\lambda}{2}\tilde{\rho}_\psi w^2\right)d\psi = 0, & (8)\\[2ex]
w(0)=w(1)=0. & (9)
\end{array}
\right.
$$

Уравнение (7) является уравнением Эйлера — Лагранжа для функционала (8) с лагранжианом $L(w, w_\psi; \lambda, \sigma)$, то есть

$$F(w;\lambda,\sigma) \equiv L_w - (L_{w_\psi})_\psi. \tag{10}$$

Поэтому задача о сопряженных течениях (7)–(9) является задачей об отыскании критических точек функционала (8), лежащих на поверхности его нулевого уровня. Исследование условий разрешимости этой задачи в пространстве гладких функций класса $C^2[0,1]$ является основной целью диссертационной работы.

Во второй главе излагаются основные результаты диссертации о разрешимости задачи о сопряженных течениях. Решение $w(\psi) \equiv 0$ удовлетворяет системе уравнений (7)–(9) при любых значениях параметров λ и $\sigma \in [0, \sigma_0)$. Таким образом, рассматриваемая задача является задачей о бифуркации тривиального решения.

В §2.1 с помощью конструкции Ляпунова — Шмидта выполняется конечномерная редукция задачи (7)–(9) с использованием пары функциональных пространств $\mathbb{E} = C_0^2[0,1] = \{w \in C^2[0,1] : w(0) = w(1) = 0\}$ и $\mathbb{F} = C[0,1]$. Для нелинейного дифференциального оператора (7), задающего гладкое отображение $F(w(\psi);\lambda,\sigma) : \mathbb{E}\times\mathbb{R}\times[0,\sigma_0) \mapsto \mathbb{F}$, рассматривается производная Фреше $A(\lambda,\sigma) = F'_w(0;\lambda,\sigma)$. С учетом малости параметра $\sigma > 0$ точки бифуркации нулевого решения разыскиваются среди точек спектра оператора $A(\lambda, 0)$, т.е. точек, являющихся собственными значениями линейной задачи Штурма — Лиувилля

$$A(\lambda,0)\langle\varphi\rangle \overset{def}{=} -\left(\frac{\varphi_\psi}{y_{0\psi}^3}\right)_\psi + \lambda\rho_{1\psi}\varphi = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \tag{11}$$

Пусть λ_0 — минимальное собственное значение указанной задачи и $\varphi_0(\psi)$ — соответствующая ему собственная функция. Оператор $A(\lambda_0, 0)$: $\mathbb{E} \mapsto \mathbb{F}$ является фредгольмовым оператором, самосопряженным относительно скалярного произведения в $L_2[0,1]$. Одномерное ядро этого оператора порождается функцией φ_0, а необходимое и достаточное условие разрешимости в пространстве $\mathbb{E}$ неоднородного уравнения $A(\lambda_0,0)\langle\varphi\rangle = f \in \mathbb{F}$ имеет вид $r\langle f\rangle = 0$ с дефектным функционалом

$$r\langle f\rangle = \int_0^1 \varphi_0(\psi) f(\psi) d\psi. \tag{12}$$

Проектор $H\langle\cdot\rangle$: $\mathbb{F} \mapsto \mathbb{F}$, определенный по формуле $H\langle f\rangle = \varphi_0 r\langle f\rangle$, задает следующие разложения пространств $\mathbb{E}$ и $\mathbb{F}$ в прямые суммы замкнутых подпространств:

$$\mathbb{E} = \mathrm{ker} A(\lambda_0,0) \oplus \ker(H|_{\mathbb{E}}), \quad \mathbb{F} = \mathrm{im} H \oplus \mathrm{im} A(\lambda_0, 0),$$

где $\mathrm{im}H$ и $\mathrm{im}A(\lambda_0,0)$ — образы соответствующих операторов. Оператор $\mathcal{G}\langle\cdot\rangle$: $\mathrm{im}A(\lambda_0,0) \mapsto \ker(H|_{\mathbb{E}})$, дающий единственное в подпространстве $\ker(H|_{\mathbb{E}})$ решение неоднородного уравнения $A(\lambda_0,0)\langle\varphi\rangle = f \in \mathrm{im}A(\lambda_0,0)$, реализуется в виде интегрального оператора

$$\mathcal{G}\langle f\rangle(\psi) = \int_0^1 G(\psi,s) f(s)\, ds \tag{13}$$

с функцией Грина $G(\psi, s)$, которая выражается с помощью квадратур через собственную функцию φ_0.

Согласно схеме Ляпунова — Шмидта решение $w \in \mathbb{E}$ задачи (7), (9) разыскивается в виде $w = b\varphi_0 + u$, где $b \in \mathbb{R}$ — амплитудный параметр, $u \in \ker(H|_{\mathbb{E}}) \subset \mathbb{E}$. С учетом разложения пространства $\mathbb{F}$, порожденного проектором H, уравнение (7) записывается в проекциях на подпространства $\mathrm{im}A(\lambda_0, 0)$ и $\mathrm{im}H$,

$$A(\lambda_0, 0)\langle u\rangle = (I - H)\langle R(b\varphi_0 + u; \lambda, \sigma)\rangle, \tag{14}$$

$$r\langle R(b\varphi_0 + u; \lambda, \sigma)\rangle = 0, \tag{15}$$

где $R(w; \lambda, \sigma) = A(\lambda_0, 0)\langle w\rangle - F(w, \lambda, \sigma)$ — малый нелинейный оператор, квадратичный по совокупности переменных. Введем следующее множество в пространстве параметров:

$$\Pi_\delta = \big\{(\lambda, \sigma, b) \,\big|\, \sigma > 0,\ |\lambda - \lambda_0| + \sigma + |b| < \delta\big\}.$$

Через $B_\delta \subset X$ будем обозначать шар радиуса δ в банаховом пространстве X с центром в нуле.

Лемма 1. *Существует $\delta > 0$, с которым определено единственное гладкое отображение класса C^2*

$$u(\lambda, \sigma, b) : \Pi_\delta \mapsto B_\delta \subset \ker(H|_{\mathbb{E}}),$$

обращающее уравнение (14) в тождество, причем для всех λ, σ, b из области определения имеет место оценка

$$\|u(\lambda, \sigma, b)(\cdot)\|_{C^2[0,1]} \le C(|b|\sigma + |\lambda - \lambda_0||b| + b^2) \tag{16}$$

с некоторой положительной константой C, не зависящей от λ, σ и b.

С указанным в лемме 1 отображением $u(\lambda, \sigma, b)$ уравнение (15) представляет собой неявно заданное скалярное уравнение разветвления относительно трех параметров λ, σ и b, описывающее поведение всех ветвей решения уравнения (7) в окрестности точки бифуркации. Полная система скалярных уравнений, эквивалентная исходной задаче (7)–(9), получается после подстановки представления решения $w = b\varphi_0 + u(\lambda, \sigma, b)$ еще и в интегральное соотношение (8). В результате задача о сопряженных течениях сводится к эквивалентной системе двух вещественных уравнений вида $bf(\lambda, \sigma, b) = 0$, $b^2 l(\lambda, \sigma, b) = 0$ с функциями

$$f(\lambda, \sigma, b) = \int_0^1 \varphi_0 \left[-\left(\frac{\rho(\varphi_{0\psi} + \tilde{u}_\psi)}{y_{0\psi}^3}\right)_\psi + \lambda\tilde{\rho}_\psi(\varphi_0 + \tilde{u}) + \right.$$
$$\left. + \left(\rho\frac{3by_{0\psi}(\varphi_{0\psi} + \tilde{u}_\psi)^2 + 2b^2(\varphi_{0\psi} + \tilde{u}_\psi)^3}{2y_{0\psi}^3(y_{0\psi} + b\varphi_{0\psi} + b\tilde{u}_\psi)^2}\right)_\psi \right] d\psi, \tag{17}$$

$$l(\lambda,\sigma,b)=\int\limits_0^1\left(\frac{\rho(\varphi_{0\psi}+\tilde{u}_\psi)^2}{2y_{0\psi}^2(y_{0\psi}+b\varphi_{0\psi}+b\tilde{u}_\psi)}+\frac{\lambda}{2}\tilde{\rho}_\psi(\varphi_0+\tilde{u})^2\right)d\psi, \tag{18}$$

где функция $\tilde{u}=b^{-1}u(\lambda,\sigma,b)(\psi)$ определена неявно в силу леммы 1.

В §2.2 анализируются условия существования малых нетривиальных решений редуцированной системы уравнений разветвления

$$f(\lambda,\sigma,b)=0, \qquad l(\lambda,\sigma,b)=0. \tag{19}$$

Существенным является тот факт, что система (19) имеет решение $b(\sigma)\equiv 0$, $\lambda=\lambda_0(\sigma)$, соответствующее минимальному собственному значению $\lambda_0(\sigma)$ линейной задачи Штурма — Лиувилля $A(\lambda,\sigma)\langle\varphi\rangle=0$, $\varphi(0)=\varphi(1)=0$, являющейся возмущением задачи (11) по параметру σ. Наличие указанной вырожденной ветви решений, которая не дает нетривиальных сопряженных течений, обеспечивается согласованной структурой функций f и l, вытекающей из вариационного свойства (10). Вычисление коэффициентов уравнений разветвления в главном порядке по параметрам λ и b дает с учетом сделанного выше замечания следующий ключевой результат.

Теорема 1. *Условие*

$$\mu(\varphi_0)\overset{def}{=}\int\limits_0^1\frac{\varphi_{0\psi}^3}{y_{0\psi}^4}\,d\psi=0 \tag{20}$$

является необходимым для существования нетривиальной ветви решений $\big(w(\sigma),\lambda(\sigma)\big)$ задачи о сопряженных течениях (7)–(9), имеющих асимптотику $\big(w(\sigma),\lambda(\sigma)\big)\to\big(0,\lambda_0\big)$ при $\sigma\to 0$.

Неравенство $\mu(\varphi_0)\neq 0$ обеспечивает существование единственного малого решения системы (19), которое в этом случае с необходимостью оказывается тривиальным (с амплитудой $b(\sigma)\equiv 0$).

В §2.3 устанавливается достаточное условие существования сопряженных течений, близких к основному потоку. С этой целью из системы уравнений (19) исключается тривиальная ветвь решений, отвечающая возмущенному собственному значению $\lambda_0(\sigma)$. Анализ коэффициентов разложения функций f и l из формул (17) и (18) во втором порядке по амплитудному параметру b дает следующий результат.

Теорема 2. *Пусть выполнено необходимое условие ветвления (20) и при этом выполнено*

$$\eta(\varphi_0)\overset{def}{=}\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\left(\frac{3\varphi_{0\psi}^2}{2y_{0\psi}^4}\right)_\psi \mathcal{G}\left\langle\left(\frac{3\varphi_{0\psi}^2}{2y_{0\psi}^4}\right)_\psi\right\rangle-\frac{\varphi_{0\psi}^4}{y_{0\psi}^5}\right)\,d\psi\neq 0, \tag{21}$$

где $\mathcal{G}\langle\cdot\rangle$ — оператор Грина (13). Тогда существует гладкая ветвь

$(\tilde{b}(\sigma), \tilde{\lambda}(\sigma))$ *решений системы (19) с асимптотикой*

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(\sigma) = \lambda_0 - \sigma \bigg(\int_0^1 \rho_{1\psi}\varphi_0^2 d\psi \bigg)^{-1} \times \\ \times \int_0^1 \left(\frac{\rho_1 \varphi_{0\psi}^2}{y_{0\psi}^3} + \lambda_0 \rho_{2\psi}\varphi_0^2 \right) d\psi + O(\sigma^2), \end{aligned} \tag{22}$$

$$\tilde{b}(\sigma) = -\frac{\sigma}{\eta(\varphi_0)} \int_0^1 \left(\frac{\rho_1 \varphi_{0\psi}^3}{2y_{0\psi}^4} - \left(\frac{3\varphi_{0\psi}^2}{2y_{0\psi}^4} \right)_\psi \times \right. \tag{23}$$

$$\left. \times \mathcal{G} \left\langle \left(\frac{\rho_1 \varphi_{0\psi}}{y_{0\psi}^3} \right)_\psi - \varphi_0 \left(\tilde{\lambda}_\sigma(0)\rho_{1\psi} + \lambda_0 \rho_{2\psi} \right) \right\rangle \right) d\psi + O(\sigma^2).$$

Асимптотика (23) дает конструктивный способ проверки нетривиальности найденной ветви решений.

В §2.4 устанавливается, что полученное необходимое условие ветвления решений задачи о сопряженных течениях допускает обобщение на более широкий класс нелинейных операторов Штурма — Лиувилля. Вывод условия (20) в теореме 1 по существу использует только вариационное свойство одномерного оператора Дюбрей–Жакотэн — Лонга и тот факт, что дополнительное интегральное соотношение (8) согласовано с этим вариационным свойством. В данном параграфе исследуются условия ветвления решений нелинейной задачи Штурма — Лиувилля общего вида, принадлежащих нулевой поверхности уровня потенциала для соответствующего оператора Эйлера — Лагранжа:

$$\begin{cases} F(w; \lambda, \sigma) \overset{def}{=} L_w - (L_{w_\psi})_\psi = 0, \qquad w \in C_0^2[0,1], & (24) \\ \displaystyle\int_0^1 L(w, w_\psi; \psi, \lambda, \sigma) d\psi = 0, & (25) \end{cases}$$

где лагранжиан $L(w, w_\psi; \psi, \lambda, \sigma) : \mathbb{R}^2 \times [0,1] \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ является гладким отображением класса C^4. Предполагается, что задача (24)–(25) имеет тривиальное решение $w(\lambda, \sigma) \equiv 0$ при любых значениях $(\lambda, \sigma) \in \mathbb{R}^2$. Предполагается также, что линеаризованный оператор $A \equiv F'_w(0; 0, 0) : C_0^2[0,1] \to C[0,1]$ имеет одномерное ядро, порожденное функцией $\varphi(\psi)$. В этой ситуации справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Необходимым условием существования непрерывной ветви ненулевых решений* $(w(\sigma), \lambda(\sigma)) : \mathbb{R} \mapsto C_0^2[0,1] \times \mathbb{R}$ *системы (24)–(25) такой, что* $(w(\sigma), \lambda(\sigma)) \to (0,0)$ *при* $\sigma \to 0$, *является равенство*

$$\int_0^1 F''_{ww}(0; 0, 0)\langle\varphi\rangle\langle\varphi\rangle\varphi \, d\psi = 0, \tag{26}$$

где $F''_{ww}(0; 0, 0)$ *— вторая производная Фреше оператора* F.

Интересно отметить, что функционал, аналогичный (26), фигурирует в работе Дж. Б. Келлера [4] в формулировке *достаточного* условия ветвления решений нелинейной задачи Штурма — Лиувилля, не содержащей каких-либо дополнительных интегральных соотношений.

В третьей главе результаты, полученные для одномерной задачи о сопряженных течениях, рассматриваются в контексте их приложений к уравнениям двумерных стационарных волн в неоднородной жидкости.

В §3.1 устанавливается соответствие между найденными условиями существования сопряженных течений в непрерывно стратифицированной жидкости и известными условиями бифуркации двухслойных кусочно-постоянных течений. Пусть U_1 и U_2 — скорости жидкости невозмущенного течения в нижнем и верхнем слоях, а H_1 и H_2 — толщины слоев. Предполагается, что профиль плотности указанного течения имеет вид $\rho_0(y) = \rho_*(1 - \sigma\theta(y - H_1))$, где $\theta(y)$ — функция Хевисайда. В этом случае линейная задача Штурма — Лиувилля (11) в обобщенной постановке имеет кусочно-линейную собственную функцию $\varphi_0 \in W_2^1[0, 1]$, условием существования которой является выполнение соотношения

$$F_1^2 + \frac{h_1}{1 - h_1} F_2^2 = h_1, \tag{27}$$

где $F_1 = U_1/\sqrt{g\sigma H}$, $F_2 = U_2/\sqrt{g\sigma H}$ — денсиметрические (плотностные) числа Фруда, $H = H_1 + H_2$ — полная глубина жидкости, $h_1 = H_1/H$. Известно [5], что эллипс (27) в плоскости чисел Фруда (F_1, F_2) задает границу непрерывного спектра линеаризованной задачи о двумерных стационарных волнах в двухслойной жидкости (точкам данного спектра соответствуют обобщенные собственные функции в виде синусоидальных волновых пакетов). Известно также, что геометрическое ме-

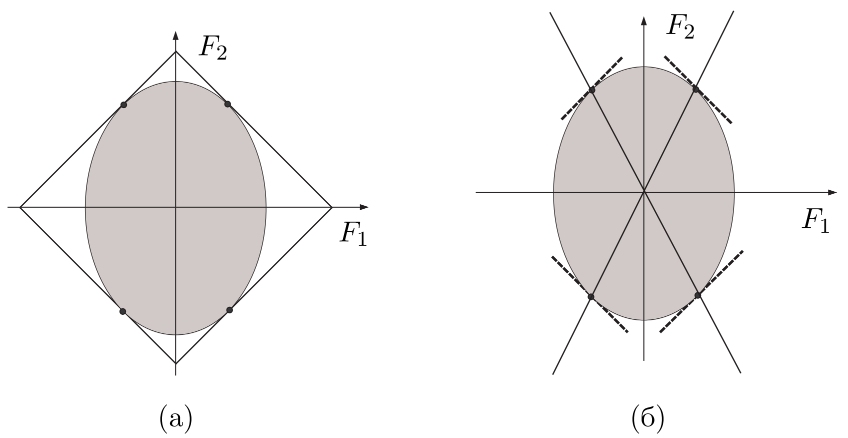

Рис. 2: Спектр линеаризованной задачи и диаграммы сопряженных течений: (а) — решение задачи [5], (б) — решение, задаваемое локальными условиями (20) и (21).

сто точек существования сопряженных течений в плоскости (F_1, F_2) есть квадрат $|F_1| + |F_2| = 1$, касающийся эллипса (27) в четырех точках $(F_1, F_2) = (\pm h_1, \pm(1 - h_1))$ (см. рис. 2а). Указанные точки являются точками бифуркации, в которых нетривиальные сопряженные течения ответвляются от основного потока (они же являются точками бифуркации для решений в виде плавного бора [5] и уединенных волн типа плато [6]). Необходимое условие ветвления (20) в рассматриваемом случае принимает вид $(F_2h_1)^2 = F_1^2(1-h_1)^2$ и задает в плоскости (F_1, F_2) пару прямых, пересекающих эллипс (27) в упомянутых выше четырех точках бифуркации (см. рис. 2б). Достаточное условие существования сопряженных течений (21) при этом указывает на наличие единственной ветви решений в окрестности каждой из этих точек. В этом смысле условия (20) и (21) характеризуют гладкие профили плотности и скорости основного течения, для которых ветвление малых решений задачи (7)–(9) аналогично ветвлению двухслойных сопряженных течений.

В §3.2 дается формулировка необходимого условия ветвления сопряженных течений (20) в исходных (эйлеровых) переменных $(\psi(y), y)$. Пусть λ_0 и $\xi_0(y)$ — минимальное собственное значение и соответствующая ему собственная функция задачи Штурма — Лиувилля (11), записанной в переменных $(\psi(y), y)$,

$$\xi_{yy} - \left(\lambda\frac{\rho_{1y}}{\psi_{0y}^2} + \frac{\psi_{0yyy}}{\psi_{0y}}\right)\xi = 0, \quad \xi(0) = \xi(1) = 0. \tag{28}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Условие*

$$\int\limits_0^1 \left[\frac{2\lambda_0}{(\psi_{0y})^{3/2}}\left(\frac{\rho_{1y}}{(\psi_{0y})^{3/2}}\right)_y + \frac{1}{\psi_{0y}}\left(\frac{\psi_{0yyy}}{\psi_{0y}}\right)_y\right]\xi_0^3 dy = 0 \tag{29}$$

является необходимым для существования нетривиальной ветви решений $\big(\psi(\sigma), \lambda(\sigma)\big)$ *задачи о сопряженных течениях, имеющих асимптотику* $\big(\psi(\sigma), \lambda(\sigma)\big) \to (\psi_0, \lambda_0)$ *при* $\sigma \to 0$.

Условие (29) является конструктивным в том смысле, что оно позволяет получать примеры профилей скорости и плотности невозмущенного потока, для которых указанное условие заведомо выполняется. Например,

$$\psi_0(y) = \frac{y+\gamma y^2}{1+\gamma}, \quad \rho_0(y,\sigma) = 1 - \frac{(1+2\gamma y)^{5/2}-1}{(1+2\gamma)^{5/2}-1}\,\sigma + O(\sigma^2),$$

где $\gamma = \mathrm{const} > -1/2, \gamma \neq 0$.

В §3.3 рассматривается задача о течениях, сопряженных с бессдвиговым основным потоком. В этом случае условие (29) принимает вид

$$\int_0^1 \rho_{1yy}(y)\xi_0^3(y)dy = 0. \tag{30}$$

Указанное условие является выполненным для профилей плотности вида $\rho_0(y,\sigma) = 1 - \sigma y + \sigma^2\rho_2(y,\sigma)$, т.е. близких к линейному или экспоненциальному. Для указанных профилей достаточное условие (21) не выполняется, что согласуется с результатом [7] о неединственности ветвей решений, порожденных минимальным собственным значением линеаризованной задачи. В работе [8], специально посвященной исследованию неединственности сопряженных течений, установлено, что при отличии от нуля функционала из (30) существует только одна ветвь решений рассматриваемой задачи. В настоящей диссертации показано, что указанная ветвь является тривиальной. Тем самым здесь существенно уточнен смысл условия (30).

В §3.4 выясняется роль условий (20), (21) в алгоритме построения асимптотического разложения для решения двумерной задачи об уединенных внутренних волнах (2)–(3). Построение приближенных решений данной задачи является существенным этапом при доказательстве теорем существования точных решений типа уединенных волн для двумерных стационарных уравнений гидродинамики [11, 9, 10].

Приближенное решение уравнений (2)–(3) разыскивается в виде формальных рядов по степеням малого параметра σ

$$w(x,\psi) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x,\psi)\sigma^k, \quad \lambda(\sigma) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sigma^k, \tag{31}$$

где λ_0 — минимальное собственное значение задачи Штурма — Лиувилля (11) с оператором $A(\lambda, 0)$. Для первых трех коэффициентов ряда возмущений для w возникает система уравнений

$$\begin{aligned}
A(\lambda_0,0)\langle w_1\rangle &= 0\\
A(\lambda_0,0)\langle w_2\rangle &= -\frac{3}{2}\left(\frac{w_{1\psi}^2}{y_{0\psi}^4}\right)_\psi + \left(\frac{\rho_1 w_{1\psi}}{y_{0\psi}^3}\right)_\psi - w_1\left(\lambda_1\rho_{1\psi} + \lambda_0\rho_{2\psi}\right)\\
A(\lambda_0,0)\langle w_3\rangle &= -\frac{w_{1xx}}{y_{0\psi}} + 2\left(\frac{w_{1\psi}^3}{y_{0\psi}^5}\right)_\psi - \frac{3}{2}\left(\frac{\rho_1 w_{1\psi}^2}{y_{0\psi}^4}\right)_\psi -\\
&\quad - 3\left(\frac{w_{1\psi}w_{2\psi}}{y_{0\psi}^4}\right)_\psi + \left(\frac{\rho_1 w_{2\psi}}{y_{0\psi}^3}\right)_\psi + \left(\frac{\rho_2 w_{1\psi}}{y_{0\psi}^3}\right)_\psi -\\
&\quad - \rho_{2\psi}(\lambda_0 w_2 + \lambda_1 w_1) - \rho_{1\psi}(\lambda_1 w_2 + \lambda_2 w_1) - \lambda_0\rho_{3\psi}w_1.
\end{aligned} \tag{32}$$

Из первого уравнения (32) находится вид функции $w_1(x,\psi) = a_1(x)\varphi_0(\psi)$ с разделенными независимыми переменными x и ψ (здесь φ_0 — собственная функция задачи (11)). Неизвестная амплитудная функция $a_1(x)$ определяется из условий совместности уравнений последующих приближений, которые представляют собой условия ортогональности правых частей неоднородных уравнений (32) собственной функции φ_0. Условие разрешимости для уравнения второго приближения дает соотношение

$$3\mu(\varphi_0)a_1^2(x)/2 + a_1(x)\chi(\varphi_0)(\tilde{\lambda}_\sigma(0) - \lambda_1) = 0, \tag{33}$$

где функционал $\mu(\varphi_0)$ определен формулой (20), а величина $\tilde{\lambda}_\sigma(0)$ определяется в соответствии с формулой (22). В силу необходимого условия существования малой ветви сопряженных течений (20) выполнено равенство $\mu(\varphi_0) = 0$. Поэтому условие (33) удовлетворяется автоматически, если кривая $\lambda(\sigma)$ из (31) касается ветви сопряженных течений $\lambda = \tilde{\lambda}(\sigma)$ в точке $(\lambda, \sigma) = (\lambda_0, 0)$. В результате условие совместности для уравнения третьего приближения из (32) дает модифицированное стационарное уравнение Кортевега — де Фриза с кубической нелинейностью, проинтегрированное один раз по x

$$\varkappa(\varphi_0)\, a_{1xx} = c_3 a_1^3 + c_2 a_1^2 + c_1 a_1. \tag{34}$$

Коэффициенты в (34) имеют вид

$$c_3 = 4\eta(\varphi_0), \qquad \varkappa(\varphi_0) = \int_0^1 \frac{\varphi_0^2}{y_{0\psi}}\, d\psi,$$

где $\eta(\varphi_0)$ определяется формулой (21), явный вид коэффициентов c_1 и c_2 здесь не столь существенен. Условие $\eta(\varphi_0) \neq 0$ является в силу теоремы 2 достаточным условием существования единственной малой ветви сопряженных течений. Именно в этом случае уравнение (34) имеет решения в виде плавного бора и уединенной волны типа плато.

В приложении дано доказательство эквивалентности необходимых условий существования сопряженных течений (20) и (29), сформулированных в теоремах 1 и 4.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю д.ф.-м.н. Н. И. Макаренко за постановку задачи и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Benjamin T.B.* Unified theory of conjugate flows. // Philos. Trans. Roy. Soc. 1971, London A, v. 269, p. 587–643.

[2] *Осмоловский В.Г.* Нелинейная задача Штурма — Лиувилля. — Учеб. пособие. СПб.: СПбГУ, 2003, 230 с.

[3] *Вайнберг М.М.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин — М.: Наука, 1969, 529 с.

[4] *Келлер Дж. Б.* Теория ветвления решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. / ред. Дж. Б. Келлер, С. Антман, пер. с англ.-М.: Мир, 1974. 254 с.

[5] *Makarenko N.I.* Smooth bore in two-layer fluid // Intern. Ser. Numer. Math., 1992, v. 106, p. 195–204.

[6] *Мальцева Ж.Л.* Об одном типе уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 5. с. 55–61.

[7] *Макаренко Н.И.* Сопряженные течения и плавные боры в слабостратифицированной жидкости // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. с. 69–78.

[8] *Макаренко Н.И.* О неединственности сопряженных течений // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 2. с. 68–74.

[9] *Friedrichs K.O., Hyers D.H.* The existence of solitary waves. // Comm. Pure. Appl. Math., 1954, v. 7, N 3, p. 517–550.

[10] *Ter-Krikorov A.M.* Theorie exacte des ondes longues stationnaries dans un liquide heterogene // J. Mecanique, 1963, N 2, p. 351–375.

[11] *Белолипецкий А.А., Тер-Крикоров А.М.* Асимптотические решения типа длинных волн для одного класса граничных задач математической физики. // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения / Под ред. В.А. Треногина, А.Ф. Филиппова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003, с. 144–196.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[12] *Казаков А.Ю.* Сопряженные сдвиговые течения слабостратифицированной жидкости. Тезисы межд. науч. студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс», Новосибирск, 2003.

[13] *Казаков А.Ю.* Сдвиговые сопряженные течения слабостратифицированной жидкости. Тезисы всеросс. конф. «Потоки и структуры в жидкостях», Санкт-Петербург, 2003, с. 200–201.

[14] *Kazakov A.* Conjugate shear flows of weakly-stratified fluid. // Proc. of VII int. conf. «Fluxes and structures in fluids», Moscow, Inst. Prob. Mech. RAS, 2003, p. 93–98.

[15] *Казаков А.Ю.* Сдвиговые сопряженные течения слабостратифицированной жидкости. Тезисы всеросс. конф. «Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение», Новосибирск, 2004, с. 66–67.

[16] *Казаков А.Ю.* Условия существования сдвиговых сопряженных течений и длинноволновые приближения, Тезисы всеросс. конф. «Проблемы механики сплошных сред и физики взрыва», Новосибирск, 2007, с. 96.

[17] *Makarenko N., Maltseva J., Kazakov A.* Conjugate flows and amplitude bounds for extreme internal waves // Geophysical Research Abstracts, 2008, v.10, EGU General Assembly, Vienna, Austria, 13–18 April 2008. A-06692.

[18] *Казаков А.Ю.* Об одной нелинейной задаче Штурма — Лиувилля из теории внутренних волн. Тезисы межд. конф. «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений». Новосибирск, 2008. с. 151.

[19] *Казаков А.Ю* Сдвиговые сопряженные течения слабостратифицированной жидкости // ПМТФ. 2009. т. 50. N 2. с. 79–88.

[20] *Makarenko, N. I., Maltseva, J. L., Kazakov, A. Yu.* Conjugate flows and amplitude bounds for internal solitary waves // Nonlinear Processes in Geophysics, 2009, v.16, N 2, p. 169–178.

Подписано к печати 16.09.2009. Формат 60 × 84 1/16. Объем 1.0 п. л.
Тираж 75 экз. Заказ № 21.

Отпечатано в Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
630090, Новосибирск, просп. акад. Лаврентьева, 15.