На правах рукописи

Степанова Ирина Владимировна

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВУХ МОДЕЛЕЙ ГИДРОДИНАМИКИ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Красноярск — 2008

Работа выполнена в Институте вычислительного моделирования СО РАН

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук, профессор В.К. Андреев
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук, профессор А.П. Чупахин
	доктор физико–математических наук, профессор О.Н. Гончарова
Ведущая организация:	Институт математики Сибирского федерального университета, г. Красноярск

Защита диссертации состоится "____" ________ 2008 г. в ____ на заседании диссертационного совета Д 212.174.02 при Новосибирском государственном университете по адресу: 630090, Новосибирск-90, ул.Пирогова, 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного университета.

Автореферат разослан "____" ________ 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д. ф.-м. н. Макаренко Н.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию уравнений движения в турбулентном пограничном слое, а также уравнений конвективного движения бинарной смеси с учетом эффекта термодиффузии и сил плавучести с помощью методов группового анализа.

Актуальность проблемы. Очень многие технически важные течения являются турбулентными. В таких течениях на главное движение налагается пульсационное движение, в результате чего возникает перемешивание отдельных частей жидкости. Это пульсационное движение в своих деталях настолько сложно, что возможность его теоретического расчета является затруднительной. Между тем перемешивание жидкости, вызываемое пульсационным движением, придает турбулентному течению особенности, резко отличающие его от ламинарного течения. Наблюдения позволяют обнаружить, что при турбулентном течении скорость и давление в фиксированной точке пространства не остаются постоянными во времени, а очень часто и очень неравномерно изменяются. Такие изменения скорости и давления, называемые пульсациями, являются наиболее характерным признаком турбулентности. Так как вследствие сложности пульсационного движения чисто теоретический расчет турбулентного течения до настоящего времени невозможен, то закономерности развитого течения приходится искать лишь для осредненных по времени величин, характеризующих это движение. Появление в уравнениях осредненного турбулентного течения членов, содержащих произведение пульсационных компонент скорости, входящих в функцию турбулентного трения, делает их незамкнутыми. На этой почве возникли полуэмпирические теории турбулентности, содержащие как правило две эмпирически определяемые "константы турбулентности". Плодотворное развитие этого направления связано с работами Л.Прандтля (1925), К.Тейлора (1915, 1932), А.Н. Колмогорова (1941). Фундаментальное значение в дальнейшем развитии теории турбулентности имели работы Л.Лойцянского, М.Д. Миллионщикова, Г.Шлихтинга. Классические опыты И. Никурадзе дали обоснование полуэмпирическим теориям и способствовали их развитию. Тем не менее, до последнего времени теория турбулентности не могла обойтись при количественном анализе без опытных коэффициентов, далеко не всегда ясной природы. В настоящей работе сделана попытка исследования основных закономерностей осредненного пристенного турбулентного течения жидкости без привлечения эмпирических коэффициентов. А именно, предлагается использовать метод группового анализа для исследования уравнений модели плоского турбулентного пограничного слоя.

В последнее время расширился круг задач, связанных с так называемыми естественно- или свободноконвективными течениями. Естественная конвекция - один из видов макроскопического движения, который интенсивно изучается в современной фундаментальной механике жидких сред. Это связано с развитием математического аппарата и средств вычислительной техники. А также с тем, что данный вид течений, возникающий под действием сравнительно малых сил плавучести, вызванных малыми градиентами плотности жидкости, часто встречается в природных условиях и технологических процессах, имеющих широкое применение и познавательную ценность. Именно термоконцентрационной конвекцией вызывается образование пространственно-регулярной по глубине тонкой структуры океана, атмосферы планет и звезд, мантии Земли и других геофизических систем. Конвективные течения часто упорядочены и в горизонтальном направлении. Развитие экспериментальных и теоретических исследований естественной конвекции привело к ее выделению в самостоятельный раздел механики жидкости и газа. Изучению моделей конвекции посвящено множество работ. Результаты исследований в этой области применяются в теплоэнергетике, металлургии, метеорологии, химии, кристаллофизике и.т.д. Действительно, такие усложненные модели с большей точностью (по сравнению с классическими) описывают реальные физические процессы и в последнее время активно используются в вычислительной гидродинамике. В связи с этим является актуальной задача качественного исследования таких моделей с помощью методов группового анализа.

Отметим, что *групповой анализ является единственным общим методом построения точных решений дифференциальных уравнений независимо от их типа.* Точные решения всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Эти решения часто используют в качестве тестовых задач для проверки корректности и оценки точности различных асимптотических, приближенных и численных методов.

Цель диссертационной работы заключается в изучении групповых свойств уравнений двух моделей гидродинамики: турбулентного пограничного слоя Прандтля и термодиффузии с учетом сил плавучести, зависящих от давления, температуры и концентрации; построении инвариантных подмоделей, их интегрировании и физической интерпретации найденных решений.

Методы исследования. В работе используется техника группового анализа и методы общей теории дифференциальных уравнений.

Научная новизна. Впервые проведен групповой анализ модели турбулентного пограничного слоя: найдены преобразования эквивалентности и решена задача групповой классификации относительно функции, определяющей касательное напряжение, при условии, что она зависит от двух переменных. Выписаны некоторые инвариантные подмодели, часть которых проинтегрирована в квадратурах. Для случая, когда касательное напряжение зависит произвольно только от одной из переменных, построена оптимальная система подалгебр Θ_1. На операторе растяжения, вошедшем в оптимальную систему, рассмотрена инвариантная подмодель, описывающая автомодельное решение. Для этой подмодели поставлена краевая задача, которая решена численно, решению дана физическая интерпретация. Также впервые проведен групповой анализ модели термодиффузии бинарной смеси с учетом сил плавучести: найдены преобразования эквивалентности и решена задача групповой классификации уравнений относительно функции, определяющей силу плавучести. Использование введенной замены переменных позволило существенно упростить исследуемую систему уравнений. Для некоторых полученных специализаций функции, определяющей силу плавучести, на операторах, допускаемых исследуемой системой уравнений, построены факторсистемы, найдены их точные решения. Для двух из полученных решений поставлены граничные условия, решены краевые задачи, дана их физическая интерпретация.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты работы носят теоретический характер и представляют интерес для специалистов в следующих областях: моделирование течений в турбулентном пограничном слое и конвективных течений, групповой анализ дифференциальных уравнений. Проведенное в работе исследование уравнений моделей термодиффузии бинарной смеси и турбулентного пограничного слоя вносит вклад в качественную теорию дифференциальных уравнений данных моделей, а также в теорию описываемых этими моделями явлений. Полученные результаты могут быть использованы при решении соответствующих задач как аналитическими, так и численными методами.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях, семинарах и научных школах: XLV Международной конференции "Студент и научно-технический прогресс" (Новосибирск, 2007), VII Всероссийской конференции по математическому моделированию и информационным технологиям (Красноярск, 2006), VIII Всероссийской конференции по математическому моделированию и информационным технологиям (Новосибирск, 2007), Конференции молодых ученых Института вычислительного моделирования СО РАН (Красноярск, 2007, 2008 гг.), Конференции молодых ученых Красноярского научного центра (Красноярск, 2007, 2008 гг.), Международной научной конференции "Современные проблемы математического моделирования и вычислительных технологий - 2008" (Красноярск, 2008 г.), семинаре под руководством академика Л.В.Овсянникова в ИГиЛ СО РАН, семинарах под руководством профессора В.К. Андреева в ИВМ СО РАН.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, который содержит 67 наименований. Общий объем диссертации 98 страниц, включая 9 рисунков и 8 таблиц, вынесенных в приложения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается обоснование актуальности работы, приведен обзор литературы по теме исследования и основные понятия, использующиеся в дальнейшем, описана структура диссертации и изложены ее основные результаты.

Первая глава посвящена исследованию групповых свойств уравнений плоского турбулентного пограничного слоя:

$$u_t + uu_x + vu_y + \frac{p_x}{\rho} = \nu u_{yy} + \tau_y, \quad p_y = 0, \quad u_x + v_y = 0, \tag{1}$$

где $u(t,x,y)$, $v(t,x,y)$ — проекции вектора осредненной скорости на оси x и y, $p(t,x)$ – давление, τ – дополнительное турбулентное напряжение, ν – кинематическая вязкость, ρ – плотность жидкости. Плотность жидкости и ее кинематическая вязкость считаются постоянными величинами.

Полагая, что дополнительное касательное напряжение $\tau = g(y, u_y)$, а также проводя в (1) замену переменных по формулам

$$\bar{t} = \frac{t}{\nu}, \quad \bar{x} = \frac{x}{\nu}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\nu}, \quad \bar{u} = u, \quad \bar{v} = v, \quad \bar{\tau} = \tau, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho},$$

перепишем систему (1) в виде (ниже черта над переменными опущена)

$$u_t + uu_x + vu_y + p_x = u_{yy}(1 + g_{u_y}) + g_y, \quad p_y = 0, \quad u_x + v_y = 0. \tag{2}$$

Появление в модели турбулентного течения в пограничном слое функции g, отвечающей за дополнительное касательное напряжение, делает их незамкнутыми, что, естественно, и затрудняет исследование. Возникает задача групповой классификации: получить ядро основной алгебры Ли допускаемых системой (1) операторов при произвольном выборе функции g и выделить спецификации функции, при которых ядро алгебры Ли расширяется. При вычислениях предполагается, что классифицируемая функция g может быть и нулевой. Это означает, что система описывает движение в ламинарном пограничном слое. Такой подход позволяет сравнить результаты группового анализа для ламинарного слоя, полученные Л.В.Овсянниковым, с результатами данной главы.

В первой части главы 1 исследуется случай нестационарного течения. Вычислена основная алгебра Ли и доказана

Лемма 1. *Базис ядра операторов основных алгебр Ли L_0 для уравнений (2) образован операторами вида*

$$Z_0 = \partial_t, \quad H_0(F_6(t)) = F_6(t)\partial_p, \quad H_1(F_1(t)) = F_1(t)\partial_x + F_{1t}\partial_u - F_{1tt}x\partial_p \qquad (3)$$

с двумя произвольными функциями $t \to F_6(t), \quad t \to F_1(t)$.

Оператор $F_6(t)\partial_p$ соответствует тому факту, что уравнениями (2) давление p определяется с точностью до слагаемого, равного произвольной функции времени. Оператор, образованный функцией $F_1(t)$, соответствует преобразованиям перехода в систему координат, поступательно движущуюся со временем по произвольному закону. Примечательной особенностью полученного ядра основных алгебр Ли при произвольном значении функции g является то, что оно бесконечномерно: ее операторы зависят от двух произвольных функций времени.

Для системы (2) также найдена группа преобразований эквивалентности и доказана

Лемма 2. *Преобразование эквивалентности уравнений (2) состоит из всех преобразований, соответствующих операторам ядра основных алгебр Ли (3) и из преобразований, зависящих от шести произвольных постоянных m, n, k, c, s, q, которые даются формулами*

$$\bar{t} = mt; \quad \bar{x} = kx; \quad \bar{y} = ny + c; \quad \bar{u} = km^{-1}u; \; \bar{v} = nm^{-1}v; \quad \bar{p} = k^2m^{-2}p + sx. \qquad (4)$$

При этом произвольный элемент g преобразуется так:

$$\bar{g} = km^{-2}ng + sy + q. \qquad (5)$$

В результате решения задачи групповой классификации были выделены некоторые дополнительные алгебры операторов: при произвольной зависимости g только от u_y выделена алгебра $L_0^I = \{L_0, \; Z_5, \quad H_2(\psi(t,x))\}$, где

$$Z_5 = 2t\partial_t + 3x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u - v\partial_v + 2p\partial_p, \; H_2(\psi(t,x)) = \psi(t,x)\partial_y + (\psi_x u + \psi_t)\partial_v$$

с произвольной гладкой функцией $\psi(t,x)$. Еще одна дополнительная алгебра была выделена в случае, когда $g = -u_y + \alpha(y)$ с некоторой произвольной нелинейной функцией $\alpha(y)$: $L_0^{II} = \{L_0,\ X_9\}$, где $X_9 = 2x\partial_x + u\partial_u - v\partial_v + 2p\partial_p$. Итогом решения задачи групповой классификации стала

Теорема 1. *Набор специализаций произвольного элемента $g(y, u_y)$ для системы (2) и допускаемых операторов преобразований для соответствующих специализаций представляет собой 17 специализаций, 12 конечномерных и 5 бесконечномерных операторов, представленных в таблице 1.1 приложения 1.*

Во второй части главы 1 решается задача групповой классификации для установившегося течения в турбулентном пограничном слое, описываемое уравнениями

$$uu_x + vu_y + p_x = u_{yy}(1 + g_{u_y}) + g_y, \quad p_y = 0, \quad u_x + v_y = 0. \tag{6}$$

Также как и для уравнений, описывающих нестационарное течение, решена задача групповой классификации: найдена основная алгебра Ли L_0 при произвольных значениях функции g, а также выделены спецификации этой функции, при которых L_0 расширяется. Основная алгебра Ли в случае установившегося течения уже является конечномерной: $L_0 = \{\partial_x,\ \partial_p\}$. Результатом решения задачи групповой классификации является

Теорема 2. *Набор специализаций произвольного элемента $g(y, u_y)$ для системы (6) и допускаемых операторов преобразований для соответствующих специализаций представляет собой 17 специализаций, 12 конечномерных и 4 бесконечномерных операторов, представленных в таблице 1.2 приложения 1.*

Необходимо заметить, что при составлении таблиц 1.1, 1.2 существенно использовались преобразования эквивалентности, которые для уравнений нестационарного течения имеют вид (4), (5), а для уравнений установившегося течения задаются равенствами

$$\begin{aligned} &\bar{x} = lx + b; \quad \bar{y} = ky + a; \quad \bar{u} = mu; \ \bar{v} = kml^{-1}v; \\ &\bar{p} = m^2p + sx + c; \quad \bar{g} = km^2l^{-1}g + sy + d. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь $a,\ b,\ c,\ d,\ k,\ l,\ m,\ s-$ вещественные параметры, причем, если полагать $b = 1$, а остальные постоянные равными нулю или $c = 1$, а остальные — нули, получим операторы основной алгебры Ли, порождающие преобразования, входящие в (7).

Заметим также, что при $g = 0$ групповой анализ систем (2), (6) уже проводился Л.В.Овсянниковым в зависимости от того, является функция давления произвольной или заданной. Результаты, полученные Л.В.Овсянниковым, согласуются с результатами, полученными в данной главе, как в случае нестационарного, так и в случае установившегося течения.

В третьей части главы 1 построено несколько инвариантных подмоделей на вычисленных операторах для соответствующих специализаций классифицируемой функции. К сожалению, далеко не все полученные факторсистемы удается проинтегрировать аналитически. Для случая, когда исходная система описывает стационарное течение и функция турбулентного напряжения зависит лишь от одной переменной, а именно $g = g(u_y)$, вычислена оптимальная система подалгебр первого порядка. Доказано

Утверждение 1. *Оптимальная система подалгебр* Θ_1 *образована операторами*

$$X_1 + kX_2 = \partial_x + k\partial_p,\ kX_2 + F_1(h_1(x)) = k\partial_p + h_1(x)\partial_y + h_{1x}u\partial_v,$$
$$X_5 = 3x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u - v\partial_v + 2p\partial_p.$$

Здесь k*— произвольная постоянная,* $h_1(x)$*— произвольная гладкая функция.*

На операторе растяжения X_5, вошедшем в оптимальную систему подалгебр, построена факторсистема

$$U(U-\xi U_\xi)+3VU_\xi+2P-3(1+g_{U_\xi})U_{\xi\xi}=0,\ \ P_\xi=0,\ \ 3V_\xi-\xi U_\xi+U=0, \quad (8)$$

где $\xi = yx^{-\frac{1}{3}},\ \ U = ux^{-\frac{1}{3}},\ \ V = vx^{\frac{1}{3}},\ \ P = px^{-\frac{2}{3}}$.

Данная факторсистема, в отличие от исходной системы, уже является системой обыкновенных дифференциальных уравнений, описывает автомодельное решение и становится проще для интегрирования. Для решения данной системы поставлены граничные условия в инвариантных переменных: равенство нулю скоростей на стенке (условия прилипания) и равенство нулю турбулентного напряжения на границе и вне пограничного слоя. Задача решалась в безразмерных переменных численно с использованием метода стрельбы и метода Рунге-Кутта четвертого порядка точности. Следует особо отметить, что в силу произвольности функции $g(u_y)$ она была выбрана согласно эмпирической формуле Прандтля: $g = \alpha_0 u_y^2$, где $\alpha_0 = \rho l^2$ (ρ — плотность среды, l —длина пути смешения — некоторая положительная постоянная, введенная Прандтлем). Для сравнения найденных характеристик турбулентного течения с ламинарным, на том же операторе растяжения построено автомодельное решение для ламинарного пограничного слоя для $p = p_0 x^{\frac{2}{3}}$. При сравнении турбулентного и ламинарного слоя при одинаковом давлении видно, что характерным признаком турбулентного пограничного слоя является увеличение толщины пограничного слоя и касательного напряжения. Что касается распределения скоростей, то в турбулентном пограничном слое оно более равномерное, чем при ламинарном течении. Эту особенность турбулентного течения обычно связывают с перемешиванием жидкости, чего в ламинарном слое нет. Кроме того, следует отметить, что и в турбулентном и в ламинарном пограничном слое на внешнем крае имеется составляющая скорости, направленная перпендикулярно к поверхности тела, таким образом, пограничный слой создает во внешнем потоке поперечные токи, объяснимые торможением жидкости о поверхность тела.

Во **второй главе** рассматривается модель конвекции бинарной смеси с учетом эффекта термодиффузии и сил плавучести. Уравнения естественной конвекции достаточно сложны, поскольку необходимо учитывать зависимость плотности от градиентов давления, температуры и концентрации, т.е. уравнение состояния жидкости. Существует целый ряд форм представления уравнения состояния, определяющих с достаточной точностью плотность через температуру, давление и минерализацию в широком диапазоне значений этих параметров. Из недостатков этих уравнений можно отметить то, что почти все они получены экспериментально и представляют собой, как правило, сложные алгебраические выражения.

В данной работе смесь предлагается считать трехпараметрической средой с параметрами состояния T – температура, p – давление, c – концентрация. Плотность жидкости определяется уравнением состояния $\rho = \rho_0 R(T,p,c)$. Искать эту зависимость будем с помощью методов группового анализа. Движение смеси описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\triangle\mathbf{u} + R(p,T,c)\mathbf{g}, \quad div \quad \mathbf{u} = 0, \\ &\frac{dT}{dt} = \chi\triangle T, \quad \frac{dc}{dt} = D\triangle c + \alpha D\triangle T, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)-$вектор координат, $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)-$ вектор скорости, $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla$ – символ полной производной, $p-$ давление, $T-$ малое отклонение температуры от среднего значения, $c-$ малое отклонение концентрации легкой компоненты от среднего значения, $\rho_0 = const-$плотность смеси при средних значениях температуры и концентрации, $\mathbf{g} = (0,0,-g)-$ вектор массовых сил, $\nu-$ кинематическая вязкость, $\chi-$ коэффициент температуропроводности, $D-$ коэффициент диффузии, $\alpha-$ коэффициент Соре, $R(p,T,c)-$ функция, определяющая силу плавучести. Предполагается, что $\nu \neq 0$, $\chi \neq 0$, $\chi \neq D$, $D \neq 0$, $\alpha \neq 0$. Если сделать замену $\rho_0^{-1}p \to \widetilde{p}$, $Rg \to R$, можно считать, что $\rho_0 = 1$, $g = 1$. После введения новых переменных для температуры ($T = \frac{\chi-D}{\alpha D}\widetilde{T}$) и концентрации ($c = \widetilde{T} + \widetilde{c}$) система упрощается:

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla\widetilde{p} + \nu\triangle\mathbf{u} + R(\widetilde{p},\widetilde{T},\widetilde{c})\mathbf{k}, \quad div \quad \mathbf{u} = 0, \\ &\frac{d\widetilde{T}}{dt} = \chi\triangle\widetilde{T}, \quad \frac{d\widetilde{c}}{dt} = D\triangle\widetilde{c}, \end{aligned} \tag{10}$$

здесь $\mathbf{k} = (0,0,-1)$. Для системы (10) поставим задачу групповой классификации относительно функции R. Необходимо получить ядро основной алгебры Ли допускаемых системой (10) операторов при произвольном выборе функции R и выделить спецификации функции, при которых ядро алгебры Ли расширяется. Все вычисления проводились в индексных переменных:

$$x^4 = t, \quad u^4 = \widetilde{p}, \quad u^5 = \widetilde{T}, \quad u^6 = \widetilde{c}. \tag{11}$$

В результате реализации алгоритма поиска основной алгебры Ли была доказана следующая

Лемма 3. *Базис ядра операторов основных алгебр Ли L_0 уравнений (10) образован операторами вида*

$$\begin{gathered} L_0 = \{X_0 = \frac{\partial}{\partial x^4}, \quad X_{12} = x^1\frac{\partial}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + u^1\frac{\partial}{\partial u^2} - u^2\frac{\partial}{\partial u^1}, \\ H_i(1) = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad H_i(x^4) = x^4\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial u^i}, \quad i = 1,2,3\}. \end{gathered} \tag{12}$$

В работе также найден оператор эквивалентности для системы (10), из представления которого следует, что преобразование эквивалентности для R возможно в двух случаях: на операторе растяжения

$$\begin{gathered} x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2} + x^3\frac{\partial}{\partial x^3} + 2x^4\frac{\partial}{\partial x^4} - u^1\frac{\partial}{\partial u^1} - \\ -u^2\frac{\partial}{\partial u^2} - u^3\frac{\partial}{\partial u^3} - 2u^4\frac{\partial}{\partial u^4} - 3R\frac{\partial}{\partial R} \end{gathered}$$

получим группу растяжений:

$$G^1 : \{\bar{x}^i = e^{a_1}x^i, \ \bar{u}^i = e^{-a_1}u^i, i = 1,2,3; \ \bar{x}^4 = e^{2a_1}x^4, \bar{u}^4 = e^{-2a_1}u^4, \bar{R} = e^{-3a_1}R\}. \tag{13}$$

На операторе $x^3\frac{\partial}{\partial u^4} - \frac{\partial}{\partial R}$ получим группу сдвигов:

$$G^2 : \{\bar{x}^3 = x^3, \ \bar{u}^4 = u^4 + a_2x^3, \quad \bar{R} = R - a_2\}, \tag{14}$$

здесь $a_1, \quad a_2-$ групповые параметры.

При решении полученных классифицирующих уравнений возникают случаи $R = const, \ R \neq const$. Если $R = const$, то к системе уравнений применим преобразование $x^4 = \bar{x}^4, \ x^3 = \bar{x}^3 + R(\bar{x}^4)^2/2, \ u^3 = \bar{u}^3 + R\bar{x}^4$. Это преобразование перехода в инерциальную систему координат по третьему направлению исключает из уравнений (10) $R = const$. Можно считать $R = 0$, тогда уравнения (10) являются уравнениями Навье-Стокса (их исследование уже проводилось В.О.Бытевым), дополненные уравнениями тепло- и массопереноса. Результаты, полученные в данной работе при $R = 0$, совпадают с ранее полученными результатами. Если $R \neq const$, то из классифицирующего уравнения следует, что нужно исследовать отдельно три случая: 1) функция R не зависит от давления, 2) функция R зависит от давления линейно, 3) R зависит от давления нелинейно. В каждом из этих случаев выделены дополнительные ядра операторов и доказаны следующие леммы:

Лемма 4. *Базис ядра операторов в случае $R = u^4 + \Phi(u^5, u^6)$ имеет вид*

$$L_0^{II} = \{X_0,\ X_{12},\ H_i(1),\ H_i(x^4), i = 1,2,$$
$$H_4(h^3(x^4)) = h^3(x^4)\frac{\partial}{\partial x^3} + h^3_{x^4}\frac{\partial}{\partial u^3} - h^3_{x^4x^4}\frac{\partial}{\partial u^4},\ H_5(\psi(x^4)) = \psi(x^4)e^{-x_3}\frac{\partial}{\partial u^4}\}.$$

В этом случае ядро (12) $L_0 \subset L_0^{II}$.

Лемма 5. *Базис ядра операторов основных алгебр Ли L_0^I уравнений (10) в случае, когда $R = R(u^5, u^6)$, образован операторами вида*

$$L_0^I = \{X_0,\ X_{12},\ H_i(h^i(x^4)) = h^i(x^4)\frac{\partial}{\partial x^i} + h^i_{x^4}\frac{\partial}{\partial u^i} - x^i h^i_{x^4x^4}\frac{\partial}{\partial u^4}\quad i = \overline{1,3},$$
$$H_0(\varphi(x^4)) = \varphi(x^4)\frac{\partial}{\partial u^4}\},$$

причем, ядро (12) $L_0 \subset L_0^I$.

В случае нелинейной зависимости функции R от u^4 базис ядра операторов совпадает с L_0.

Результат решения задачи групповой классификации представлен в следующей теореме.

Теорема 3. *Результат групповой классификации произвольного элемента $R(u^4, u^5, u^6)$ для системы (10) представляет собой набор специализаций и соответствующих конечномерных и бесконечномерных операторов, представленных в таблицах 2.1, 2.1*, 2.2, 2.3 приложения 2.*

В следующей части второй главы проведено построение некоторых инвариантных подмоделей и их решений для системы (10). В работе изучены 7 инвариантных подмоделей, описывающих стационарные и автомодельные решения. Все эти подмодели проинтегрированы в явном виде, при этом найдены новые точные решения, а также обобщения ранее известных решений.

В качестве примера рассмотрим подмодель, построенную на операторах

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial x^4},\ H_2(1) = \frac{\partial}{\partial x^2},\ H_1(1) + H_0(\lambda) = \frac{\partial}{\partial x^1} + \lambda\frac{\partial}{\partial u^4}.$$

Решение (10), с учетом обозначений (11) для $R = R(u^5, u^6)$, ищем в виде

$u^1 = u^1(x^3),\ u^2 = u^2(x^3),\ u^3 = u^3(x^3),\ u^4 = P(x^3)+\lambda x^1,\ u^5 = u^5(x^3),\ u^6 = u^6(x^3).$

Факторсистема запишется так:

$$\begin{aligned}&u^3u^1_{x^3} + \lambda = \nu u^1_{x^3x^3},\quad u^3u^2_{x^3} = \nu u^2_{x^3x^3},\quad u^3u^3_{x^3} + P_{x^3} = \nu u^3_{x^3x^3} - R(u^5, u^6),\\ &u^3_{x^3} = 0,\quad u^3u^5_{x^3} = \chi u^5_{x^3x^3},\quad u^3u^6_{x^3} = Du^6_{x^3x^3}.\end{aligned} \tag{15}$$

После решения системы (15) в случае $u^3 = w_0 = 0$, решение (9) находится в виде:

$$\begin{aligned}&u = \frac{\lambda}{2\nu}z^2 + k_1z + k_2,\ v = k_3z + k_4,\ w = 0,\\ &T = \frac{\chi - D}{\alpha D}(k_5z + k_6),\\ &c = (k_5 + k_7)z + k_6 + k_8,\\ &p = \rho_0\Big[-g^{-1}\int R(k_5z + k_6, k_7z + k_8)dz + k_9 + \lambda x\Big],\end{aligned} \tag{16}$$

где $k_i,\quad i = \overline{1, 9}, \lambda-$ произвольные постоянные, а также введены физические обозначения переменных:

$$x = x^1,\ y = x^2,\ z = x^3,\ u = u^1,\ v = u^2,\ w = u^3,$$
$$p = \rho_0u^4,\ T = \frac{\chi - D}{\alpha D}u^5,\ c = u^6 + u^5,\ Rg^{-1} \to R.$$

При интерпретации найденных решений, вообще говоря, можно рассматривать различные постановки задач. Например, движение между двумя плоскими стенками, со свободной границей или с границей раздела. Для решения (16) была поставлена краевая задача, описывающая течение смеси между двумя твердыми стенками $z = 0,\ z = L$. Граничные условия сформулированы в виде

$z = 0:\ u = v = w = 0;\quad T = \theta_0;\quad c_z + \alpha T_z = 0,$

$z = L:\ u = v = w = 0;\quad T = \theta_1;\quad c_z + \alpha T_z = 0.$

Равенство нулю скоростей выражает условие прилипания к твердым стенкам, $\theta_0,\ \theta_1-$ заданная температура на стенках, последнее условие означает отсутствие потока вещества через стенки. Используя данные граничные условия, получаем решение нашей задачи в виде:

$$u=\frac{\lambda}{2\nu}z^2-\frac{\lambda}{2\nu}Lz,\quad v=0,\quad w=0,$$
$$T=\frac{\theta_1-\theta_0}{L}z+\theta_0,\quad c=\frac{(\theta_0-\theta_1)\alpha}{L}z+\frac{\alpha D}{\chi-D}\theta_0+k_8,$$
$$p=\rho_0\Big[-g^{-1}\int R\Big(\frac{(\theta_1-\theta_0)\alpha D}{L(\chi-D)}z+\frac{\theta_0\alpha D}{\chi-D},(\alpha\frac{\theta_0-\theta_1}{L}(1+\frac{D}{\chi-D}))z+k_8\Big)dz+$$
$$+k_9+\lambda x\Big]$$

Если к тому же задать массовый расход жидкости Q_0 через поперечное сечение слоя $Q_0=\int_0^L u(z)dz$, можно вычислить градиент давления $\lambda=-\frac{12\nu Q_0}{L^3}$. Таким образом,

$$u=-\frac{6Q_0}{L^3}z^2+\frac{6Q_0}{L^2}z,$$
$$p=\rho_0\Big[-g^{-1}\int R\Big(\frac{(\theta_1-\theta_0)\alpha D}{L(\chi-D)}z+\frac{\theta_0\alpha D}{\chi-D},(\alpha\frac{\theta_0-\theta_1}{L}(1+\frac{D}{\chi-D}))z+k_8\Big)dz+$$
$$+k_9-\frac{12\nu Q_0}{L^3}x\Big].$$

Заметим, что данное решение представляет собой обобщение течения Пуазейля, возникающего в горизонтальном слое под действием постоянного градиента давления при линейно распределенных температуре и концентрации. Профиль скорости, как и в течении Пуазейля, параболический.

Заключение содержит результаты и выводы проделанной работы:

1. Проведен групповой анализ модели плоского турбулентного пограничного слоя в случаях нестационарного и установивишегося течений. Найдены преобразования эквивалентности и решена задача групповой классификации уравнений относительно функции, определяющей дополнительное турбулентное напряжение. Показано, что уравнения модели в случае нестационарного течения допускают бесконечномерную алгебру Ли операторов, для установившегося течения основная алгебра Ли конечномерная, причем обе алгебры отличаются от известных для классических уравнений Прандтля.

2. Для некоторых специализаций функции дополнительного касательного напряжения выписаны инвариантные подмодели течения жидкости в турбулентном пограничном слое, часть из которых проинтегрирована в явном виде. Численно найдено одно новое автомодельное решение уравнений модели, ему дана физическая интерпретация.

3. Решена задача групповой классификации трехмерных уравнений термодиффузии относительно функции R, определяющей силу плавучести и произвольно зависящей от трех параметров: температуры, давления и концентрации. Указана замена переменных для температуры и концентрации, с помощью которой уравнение диффузии можно привести к однородному, в результате чего исходная система существенно упрощается. При решении классифицирующих уравнений выделяются три случая зависимости функции R от давления: 1) R зависит от давления линейно, 2) R не зависит от давления, 3) R зависит от давления нелинейно. Каждый этот случай был исследован отдельно, получены различные специализации классифицируемой функции и операторы, расширяющие основную алгебру Ли. Найденные преобразования эквивалентности позволяют существенно упростить вид функции R.

4. Выделены интегрируемые в квадратурах инвариантные подмодели уравнений термодиффузии для некоторых специализаций функции R, определяющей силу плавучести. Для двух подмоделей, в которых функция R произвольно зависит от температуры и концентрации, поставлены и решены краевые задачи. В случае течения жидкости между двумя твердыми стенками под действием постоянного градиента давления одна из подмоделей описывает обобщение течения пуазейлевского типа с параболическим профилем скоростей при линейном распределении температуры и концентрации в зависимости от поперечной координаты. При задании граничных условий на твердой стенке и свободной поверхности другая подмодель описывает состояние покоя жидкости под воздействием линейно распределенных температуры и концентрации.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору В.К. Андрееву за постановку задачи и внимание к работе, а также к.ф.-м.н. А.А. Родионову за обсуждение и полезные замечания.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Степанова И.В. Групповая классификация уравнений стационарного плоского турбулентного пограничного слоя. Вестник КрасГУ, 2006, № 1. С. 114-119.

2. Степанова И.В. Инвариантная подмодель уравнений плоского стационарного турбулентного слоя. Материалы конф. молодых ученых ИВМ СО РАН, Красноярск: ИВМ СО РАН, 2007, С. 30-36.

3. Степанова И.В. Групповая классификация уравнений плоского нестационарного пограничного слоя. Вычислительные технологии, Новосибирск, 2007, Т.12,№6. С. 101-108.

4. Степанова И.В. Об инвариантных моделях термодиффузионных течений. Сборник трудов конференции молодых ученых Красноярского научного центра. Красноярск: КНЦ СО РАН, 2008. С. 44–45.

5. Родионов А.А., Степанова И.В.Групповая классификация уравнений модели конвекции с учетом сил плавучести.Вычислительные технологии, Новосибирск, 2008, Т.13, №5, С. 60-69.

6. Степанова И.В. О некоторых точных решениях модели конвекции с учетом сил плавучести. Материалы конф. молодых ученых ИВМ СО РАН, Красноярск: ИВМ СО РАН, 2008, С. 10-17.

Работа по теме диссертации выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты НШ 5873.2006.1, НШ 2260.2008.1, грант РФФИ №08 – 01 – 00762), интеграционного проекта СО РАН №2.15 и Красноярского краевого фонда науки (проекты 17G088 и 18G015).

Подписано в печать ..2008 г.
Формат 60×84/16
Усл. печ. л. 1. Тираж 120 экз.
Отпечатано на ризографе ИВМ СО РАН
660036 Академгородок, Красноярск