На правах рукописи

ДЕВЯТКОВ Антон Павлович

ПРЕДЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА, ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА И УСТРАНИМЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ФУНКЦИЙ

01.01.01 – математический анализ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Тюмень – 2008

Работа выполнена на кафедре математического анализа и теории функций Тюменского государственного университета

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор Кругликов В. И.

Научный консультант
доктор физико-математических наук,
доцент Латфуллин Т. Г.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Асеев В. В.
доктор физико-математических наук,
профессор Стругов Ю. Ф.

Ведущая организация
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Защита состоится "__" декабря 2008 г. в __.__ часов на заседании диссертационного совета Д 212.174.02 в Новосибирском государственном университете по адресу 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного университета.

Автореферат разослан "__" октября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, доктор
физико-математических наук Макаренко Н. И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Понятие предельного множества является основным инструментом при изучении разнообразных граничных свойств функций.

Это понятие впервые было введено П. Пенлеве в 1895 году для наглядной характеристики поведения аналитической функции в окрестности её особой точки. Будучи чисто топологическим, оно применимо к произвольным функциям в пространствах любой размерности. Однако, имея ввиду прежде всего приложения к аналитическим функциям комплексного переменного, мы все рассмотрения будем проводить на плоскости. В современной терминологии понятие предельного множества описывается следующим образом.

Пусть в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ задана комплекснозначная функция $w = f(z)$. Для некоторого подмножества $A \subset D$ и точки $z_0 \in \overline{A}$ (черта означает замыкание) *предельным множеством функции* f в точке z_0 относительно множества A назовём совокупность $C(f, A, z_0)$ точек w таких, что существует последовательность точек $(z_k)_{k=1}^{\infty} \subset A$, $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k) = w$.

Нетрудно показать, что предельное множество функции f представимо в виде

$$C(f, A, z_0) = \bigcap_{p\in I} \overline{f(\delta_p \cap A)}\,,$$

где $(\delta_p)_{p\in I}$ – произвольная фундаментальная система окрестностей точки z_0.

Классические теоремы Сохоцкого-Вейерштрасса, Пикара и Жюлиа можно рассматривать как теоремы о предельных множествах аналитической функции в её изолированной особой точке, теоремы Фату и Линделёфа – как теоремы о предельных множествах в граничной точке круга.

Существенное развитие теория граничных свойств аналитических функций получила в первую треть XX века в работах

П. Пенлеве, Ф. Иверсена, В. Гросса, В.В. Голубева, Н.Н. Лузина, И.И. Привалова, К. Каратеодори, В. Зейделя, А. Бёрлинга, Ф. и М. Риссов, Р. Неванлинны, А.И. Плеснера.

После некоторого затишья, длившегося примерно до 1950 года, теория предельных множеств стала вновь развиваться. В 60-е годы выходят монографии К. Носиро [1] и Э. Коллингвуда, А. Ловатера [2], посвященные предельным множествам. В работах этого периода помимо аналитических функций большое внимание начинает уделяться произвольным функциям. Значительный вклад в развитие теории предельных множеств внесли отечественные математики Е.П. Долженко, А.Г. Витушкин, В.И. Гаврилов, Г.Ц. Тумаркин, П.П. Белинский, И.Н. Песин и другие. Из иностранных ученых, работавших в этой области, можно назвать Л. Альфорса, О. Лехто, Л. Карлесона, Дж. Дуба, М. Оцука, Г. Маклейна. Обширная библиография, доведённая до 1971 года, содержится в обзоре [3].

Наряду с изучением граничных свойств отдельных функций многие исследователи рассматривали последовательности функций. Вопросами, связанными со сходимостью последовательностей аналитических функций занимались К. Каратеодори, П. Монтель, А.И. Маркушевич, А.Я. Хинчин, Г.Ц. Тумаркин, А. Островский, Г.Д. Суворов, Б.П. Куфарев.

В 1981 году В.И. Кругликовым [4] было введено понятие предельного множества последовательности функций. В статье [5] им были указаны некоторые применения этого понятия к исследованию граничных свойств последовательностей функций.

Цель работы состоит в изучении нового понятия предельного множества последовательности функций и развитии применений этого понятия к исследованию свойств сходимости последовательностей аналитических функций.

Методика исследования основана на общих методах метрической топологии и теории функций действительного переменного, классических методах теории функций комплексного переменного.

Научная новизна. В диссертации изучены различные топологические вопросы теории предельных множеств последовательности функций. Дан ответ на вопрос Б.П. Куфарева о распределении простых концов последовательности областей. Получено дополнение к теореме Бэра о точках непрерывности функций первого класса. Для последовательностей аналитических в круге функций получены аналоги теорем Фату и Линделёфа. Указаны условия, обеспечивающие совпадение предельных множеств последовательности аналитических в круге функций вдоль двух различных путей, ведущих в одну точку. Решена задача о продолжении свойства непрерывной сходимости последовательности аналитических функций на множество своих особенностей.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретическое значение при изучении свойств сходимости последовательностей аналитических функций, в теории простых концов последовательности областей Г.Д Суворова и в теории приближений.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре кафедры математического анализа и теории функций Тюменского государственного университета под руководством профессора В.И. Кругликова (неоднократно); на семинаре лаборатории геометрической теории функций под руководством профессоров А.В. Сычёва и В.В. Асеева в Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (апрель 2006 г.); на семинаре "Предельные множества"под руководством профессора В.И. Гаврилова в Московском государственном университете в рамках конференции "Ломоносов-2007"(апрель 2007 г.); На 37-й Региональной молодежной школе-конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики"(февраль 2006 г., Екатеринбург); на XLIV международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс"(апрель 2006 г., Новосибирск).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [6]-[14]. В работах [6], [7] все утверждения сформулированы и доказаны А.П. Девятковым, В.И. Кругликовым осуществлялось общее руководство на уровне постановки задач и критического анализа доказательств. В работе [12] А.П. Девятковым проведено доказательство двух теорем, анонсированных В.И. Кругликовым в статье [5]. Вклад соавторов в результаты работы [10] равный.

Структура и объём диссертации. Диссертация содержит 102 страницы и состоит из введения, трёх глав и списка литературы, содержащего 42 наименования работ отечественных и зарубежных авторов.

Автор пользуется случаем выразить благодарность своему безвременно ушедшему из жизни научному руководителю профессору Виктору Ивановичу Кругликову за постановки задач и постоянное внимание к работе.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе мы вводим понятие предельного множества последовательности функций, указываем его топологические свойства и даём некоторые иллюстративные применения этого понятия.

Пусть в области D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ задана последовательность $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ комплекснозначных функций $w = f_j(z)$.

Определение 1.1.1. *Для некоторого подмножества* $A \subset D$ *и точки* $z_0 \in \overline{A}$ *предельным множеством последовательности функций* $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ *в точке* z_0 *относительно множества* A *назовём совокупность* $C(\mathscr{F}, A, z_0)$ *точек* w *таких, что существует последовательность точек* $(z_k)_{k=1}^{\infty} \subset A$, $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0$, *и подпоследовательность функций* $(f_{j_k})_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$, *для которых* $\lim\limits_{k\to\infty} f_{j_k}(z_k) = w$.

В следующей теореме, анонсированной в статье [5], приводится теоретико-множественная формула для предельного множества.

Теорема 1.1.1. *Предельное множество последовательно-*

сти функций представимо в виде

$$C(\mathscr{F}, A, z_0) = \bigcap_{r>0} \mathop{Ls}_{j\to\infty} \Delta_j(A, r)\,,$$

где $\mathop{Ls}_{j\to\infty} \Delta_j(A,r)$ – *верхний топологический предел последовательности множеств* $\Delta_j(A,r) = f_j(\delta_r \cap A)$, $\delta_r = \{z : |z - z_0| < r\}$, $j = 1, 2, \ldots$

Из этого представления вытекают основные топологические свойства предельного множества последовательности функций.

Первым приложением понятия предельного множества последовательности функций является следующий теоретико-множественный критерий равномерной сходимости, указанный в работе [5].

Теорема 1.1.3. *Последовательность функций* $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ *равномерно сходится на множестве* D *к функции* f *тогда и только тогда, когда относительно любого множества* $A \subset D$ *в каждой точке* $z_0 \in \overline{A}$ *предельные множества последовательности* $\mathscr{F}$ *и функции* f *совпадают, т.е.* $C(\mathscr{F}, A, z_0) = C(f, A, z_0)$.

Второй параграф посвящен приложению понятия предельного множества последовательности функций к теории простых концов последовательности областей Г.Д. Суворова.

Исследования Г.Д. Суворова обобщают (в идейном смысле) схему построения теории простых концов Каратеодори для фиксированной области на случай переменных областей и в качестве основных элементов содержат в себе определение простого конца последовательности областей и доказательство биекции между множествами простых концов последовательности областей $(B_j)_{j=1}^{\infty}$ и её ядра B с последующим изучением структуры носителя простого конца и основанной на том классификации простых концов последовательности областей, включающей в себя восемь их типов.

Краткое описание понятия простого конца последовательности областей, а также его носителя, приведено в первом пункте §2.

Основной результат §2 заключается в том, что предельное множество последовательности конформных отображений единичного круга на сходящуюся к ядру равномерно ограниченную последовательность односвязных областей является носителем простого конца Г.Д. Суворова. Более точно, имеет место следующее утверждение, анонсированное в статье [5].

Теорема 1.2.1. *Для последовательности $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ конформных отображений $f_j\colon D \to B_j$, нормированных условиями $f_j(0) = 0, f_j'(0) > 0$ и отображающих единичный круг $D : |z| < 1$ на равномерно ограниченную последовательность областей $(B_j)_{j=1}^{\infty}$, сходящуюся к своему ядру B, в каждой точке $e^{i\theta}$ на окружности $|z| = 1$ полное предельное множество $C(\mathscr{F}, D, e^{i\theta})$ представляет собой носитель $|P_\theta|$ простого конца P_θ последовательности областей $(B_j)_{j=1}^{\infty}$, соответствующего (по теореме Г.Д. Суворова о соответствии границ) заданной точке $e^{i\theta}$.*

В третьем параграфе исходная последовательность функций $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ предполагается сходящейся. Тогда для всякого подмножества $A \subset D$ и каждой точки $z_0 \in \overline{A}$ имеют смысл два предельных множества: $C(\mathscr{F}, A, z_0)$ – предельное множество последовательности функций $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ и $C(f, A, z_0)$ – предельное множество её предельной функции $f(z) = \lim\limits_{j\to\infty} f_j(z)$. Возникает вопрос: когда эти предельные множества совпадают? Частично ответ на поставленный вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 1.3.1. *Множество тех точек $z_0 \in \overline{A}$, в которых выполнено равенство $C(\mathscr{F}, A, z_0) = C(f, A, z_0)$, является G_δ-множеством на $\overline{A}$.*

В качестве следствия этой теоремы, мы даём отрицательный ответ на один вопрос Б.П. Куфарева о возможных типах распределения простых концов последовательности областей.

В четвертом параграфе даётся приложение понятия предельного множества к классификации функций по Бэру.

Напомним, что действительную функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a, b]$, называют функцией первого класса Бэра, если она не является непрерывной, но представима в виде $f(x) = \lim_{j\to\infty} f_j(x)$, где все функции $f_j(x)$ непрерывны на этом отрезке.

Классическая теорема Р. Бэра утверждает, что для всякой функции первого класса $f(x)$ и любого непустого замкнутого множества A, расположенного на отрезке $[a, b]$, найдётся точка $x_0 \in A$, в которой функция $f(x)$ является непрерывной относительно множества A.

Описывая свойства предельной функции, теорема Бэра не даёт никакой информации о самом процессе её образования.

Мы, используя в качестве инструмента исследования понятие предельного множества последовательности функций, установили наличие более сильных свойств (чем при поточечной сходимости) предельного процесса образования функций первого класса.

Прежде, чем сформулировать соответствующую теорему, сделаем замечание о том, что вырожденность (т.е. одноточечность) предельного множества $C(\mathscr{F}, A, z_0)$ последовательности функций $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ равносильна непрерывной сходимости этой последовательности функций в точке z_0 относительно множества A, т.е. существованию предела $\lim_{j\to\infty} f_j(z_j)$ для любой последовательности точек $(z_j)_{j=1}^{\infty} \subset A$ с $\lim_{j\to\infty} z_j = z_0$.

Основным результатом четвёртого параграфа является следующее утверждение.

Теорема 1.4.1. *Пусть на некотором отрезке $[a, b]$ задана последовательность $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ непрерывных функций $f_j(x)$, сходящаяся в каждой точке этого отрезка. Тогда для любого непустого замкнутого множества A, расположенного на отрезке $[a, b]$, найдётся точка $x_0 \in A$, в которой предельное множество $C(\mathscr{F}, A, x_0)$ вырожденно, и, таким образом, последовательность функций $\mathscr{F}$ непрерывно сходится в точке x_0 относительно множества A.*

Во второй главе основным объектом исследования являются последовательности аналитических функций $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$, заданные в единичном круге $D : |z| < 1$. Опираясь на понятие предельного множества, мы проводим систематическое изучение поведения таких последовательностей вблизи граничной окружности.

Результаты второй главы можно расценивать как аналоги соответствующих теорем о предельных множествах для одной функции – теоремы П. Фату о радиальных пределах, теоремы Э. Линделёфа об угловых пределах, теоремы о совпадении предельных множеств вдоль различных путей, теоремы Э. Коллингвуда о множествах максимальной неопределённости.

Отметим, что полного совпадения здесь нет. Например, при построении аналога теоремы Фату, которому посвящен первый параграф, важным оказывается понятие консервативного предельного множества.

Определение 2.1.1. *Скажем, что предельное множество $C(\mathscr{F}, A, z_0)$ последовательности функций $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ в точке z_0 относительно множества A является консервативным, если оно не изменяется при замене последовательности $\mathscr{F}$ любой её подпоследовательностью, т.е. $C(\mathscr{F}, A, z_0) = C(\Phi, A, z_0)$ для всякой подпоследовательности функций $\Phi = (f_{j_k})_{k=1}^{\infty}$.*

Аналог теоремы Фату звучит следующим образом.

Теорема 2.1.1. *Для того, чтобы равномерно ограниченная последовательность $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ однолистных аналитических в круге $D : |z| < 1$ функций имела п.в. на окружности $|z| = 1$ радиальные граничные значения (т.е. предельные множества $C(\mathscr{F}, \gamma_\theta, e^{i\theta})$ вдоль радиусов $\gamma_\theta : z = re^{i\theta}, 0 \le r < 1$, вырождены для п.в. $\theta \in [0, 2\pi]$), необходимо и достаточно, чтобы при п.в. $\theta \in [0, 2\pi]$ данная последовательность функций $\mathscr{F}$ имела в точке $e^{i\theta}$ консервативное радиальное предельное множество.*

Условие консервативности здесь не может быть отброшено, что подтверждается соответствующим контрпримером.

В качестве следствия этой теоремы мы получаем дополнение к классической теореме Каратеодори о сходимости последовательности конформных отображений.

Во втором параграфе формулируется теорема о связи угловых и радиальных граничных значений последовательности аналитических в круге функций, аналогичная теореме Линделёфа для одной функции.

Теорема 2.2.1. *Пусть в круге* $D : |z| < 1$ *задана равномерно ограниченная последовательность* $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ *аналитических функций* $f_j(z)$. *Если её предельное множество* $C(\mathscr{F}, \gamma_\theta, e^{i\theta})$ *вдоль радиуса* $\gamma_\theta : z = re^{i\theta}, 0 \le r < 1$, *вырожденно, то таковым же является и предельное множество* $C(\mathscr{F}, \Delta_\theta, e^{i\theta})$ *вдоль любого угла* Δ_θ *с вершиной в* $e^{i\theta}$, *образованного хордами окружности* $|z| = 1$.

В третьем параграфе мы подробно исследуем введённое понятие консервативного предельного множества: даём критерий консервативности, описываем топологическое строение множества точек, в которых предельное множество является консервативным, приводим теоремы о существовании консервативных подпоследовательностей.

Ограничимся здесь критерием консервативности, для формулировки которого мы вводим понятие нижнего предельного множества, имеющее и самостоятельный интерес.

Определение 2.3.1. *Нижним предельным множеством последовательности функций* $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ *в точке* z_0 *относительно множества* A *назовём совокупность* $\underline{C}(\mathscr{F}, A, z_0)$ *точек* w *таких, что существует последовательность точек* $(z_j)_{j=1}^{\infty} \subset A$, $\lim\limits_{j\to\infty} z_j = z_0$, *для которой* $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(z_j) = w$.

Следующая теорема даёт другие эквивалентные описания нижнего предельного множества, оправдывающие его название.

Теорема 2.3.1. *Нижнее предельное множество последовательности функций представимо в виде*

1)

$$\underline{C}(\mathscr{F}, A, z_0) = \bigcap_{r>0} \mathop{Li}_{j\to\infty} \Delta_j(A, r)\,,$$

где $\underset{j\to\infty}{Li}\,\Delta_j(A,r)$ – *нижний топологический предел последовательности множеств* $\Delta_j(A,r) = f_j(\delta_r \cap A)$, $\delta_r = \{z : |z - z_0| < r\}$, $j = 1, 2, \ldots$

2)

$$\underline{C}(\mathscr{F}, A, z_0) = \bigcap_{\Phi\subset\mathscr{F}} C(\Phi, A, z_0)\,,$$

где пересечение берётся по всевозможным подпоследовательностям функций $\Phi = (f_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ *из* $\mathscr{F}$.

Критерий консервативности звучит следующим образом.

Теорема 2.3.2. *Предельное множество последовательности функций* $C(\mathscr{F}, A, z_0)$ *консервативно тогда и только тогда, когда оно совпадает с нижним предельным множеством* $C(\mathscr{F}, A, z_0) = \underline{C}(\mathscr{F}, A, z_0)$.

В четвёртом параграфе мы рассматриваем равномерно ограниченные последовательности $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ однолистных аналитических в единичном круге $D : |z| < 1$ функций и находим условия, обеспечивающие совпадение предельных множеств $C(\mathscr{F}, A_1, e^{i\theta})$ и $C(\mathscr{F}, A_2, e^{i\theta})$ этой последовательности функций вдоль различных путей A_1, A_2 , ведущих в одну точку $e^{i\theta} \in \partial D$.

Чтобы сформулировать соответствующую теорему, мы вводим новый тип предельного множества. Скажем, что полное предельное множество $C(\mathscr{F}, D, e^{i\theta})$ последовательности функций $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ является *сжимающимся* , если в точке $e^{i\theta}$ выполнено равенство

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ j\to\infty}} d_I f_j(\delta_r \cap D) = 0\ ,$$

где $\delta_r = \{z : |z - e^{i\theta}| < r\}$, а $d_I M$ – внутренний диаметр множества M, т.е. точная верхняя грань диаметров кругов K, целиком содержащихся в этом множестве

$$d_I M = \sup_{K\subset M} \operatorname{diam} K\ .$$

Следующее утверждение даёт простейший признак сжимаемости предельного множества.

Лемма 2.4.1. *Если предельное множество $C(\mathscr{F}, D, e^{i\theta})$ не содержит внутренних точек, то оно сжимающееся.*

Основной результат четвертого параграфа звучит так.

Теорема 2.4.1. *Пусть в круге $D : |z| < 1$ задана равномерно ограниченная последовательность $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ однолистных аналитических функций $f_j(z)$, и пусть в точке $e^{i\theta}$ предельное множество $C(\mathscr{F}, D, e^{i\theta})$ сжимающееся. Если для некоторых множеств $A_1, A_2 \subset D$, имеющих на ∂D одну общую предельную точку $e^{i\theta}$, отклонение по Хаусдорфу в гиперболической метрике конечно, т.е.*

$$\mathrm{dist}_h(A_1, A_2) < +\infty \ ,$$

то вдоль этих множеств предельные множества последовательности функций $\mathscr{F}$ совпадают, а именно

$$C(\mathscr{F}, A_1, e^{i\theta}) = C(\mathscr{F}, A_2, e^{i\theta}) \ .$$

В пятом параграфе мы доказываем две теоремы о множествах максимальной неопределённости последовательностей функций, аналогичные теоремам Э. Коллингвуда для одной функции.

В третьей главе решается задача о продолжении свойства сходимости последовательности аналитических функций на множество своих особенностей.

В первоначальной постановке задача об устранимости некоторого множества E из области D означает поиск условий, при которых для каждой ограниченной аналитической в $D \setminus E$ функции $f(z)$ обеспечивается возможность её доопределения на всю область D с сохранением свойства аналитичности.

Множества E, дающие положительное решение этой задачи принято называть AB-*устранимыми* (или AB-множествами). В настоящее время такие множества хорошо изучены в работах Е.П. Долженко, А.Г. Витушкина, С.Я. Хавинсона и других. Достаточным условием AB-устранимости множества E является равенство нулю его длины, т.е. одномерной меры Хаусдорфа $m_1 E = 0$, а необходимым – равенство нулю его α-мерной меры

Хаусдорфа $m_\alpha E = 0$ при всех $\alpha > 1$. Необходимое и достаточное условие AB-устранимости заключается в равенстве нулю так называемой аналитической ёмкости множества $\gamma(E) = 0$.

Дополнительно к AB-устранимым множествам мы вводим ещё два типа устранимых множеств, выражаемые терминами C- и C^1-устранимости, суть которых состоит в требовании вырожденности в каждой точке $a \in E$ и для любой ограниченной аналитической в $D \setminus E$ функции соответствующих предельных множеств: $C(f, D \setminus E, a)$ – в случае *C-устранимых множеств* и $C(\varphi, (D \setminus E)^2 \setminus I, A)$ – в случае *C^1-устранимых множеств*, где функция двух переменных

$$\varphi(z, \zeta) = \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$$

определена при $z, \zeta \in D \setminus E$, $z \neq \zeta$, $A = (a, a)$, а $I = \{(z, \zeta) : z = \zeta\}$ – диагональ в $\mathbb{C}^2$.

Путём несложных рассуждений легко убедиться, что условия как C-устранимости, так и C^1-устранимости гарантируют возможность продолжения функции $f(z)$ на множество E по непрерывности, при этом условие C^1-устранимости обеспечивает ещё и аналитичность такого продолжения.

Более сильным утверждением здесь является

Теорема 3.1.2. *Классы устранимых множеств AB, C и C^1 попарно совпадают.*

Опишем теперь для семейства всевозможных равномерно ограниченных последовательностей $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ аналитических и непрерывно сходящихся в $D \setminus E$ функций $f_j(z)$ классы устранимых множеств.

$\widetilde{AB}$-устранимые множества $E \subset D$ характеризуются тем, что во всякой такой последовательности $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ каждая функция $f_j(z)$ может быть доопределена до аналитической функции на всю область D, и получаемая так последовательность доопределённых функций непрерывно сходится в каждой точке области D (что равносильно равномерной сходимости этой последовательности внутри D).

Более слабой является характеристика $\widetilde{C}$-*устранимого множества*, заключающаяся в том, что для каждой точки $a \in E$ предельное множество $C(\mathscr{F}, D \setminus E, a)$ вырожденно для всякой последовательности функций $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$.

Нетрудно показать, что условие $\widetilde{C}$-устранимости множества E позволяет продолжить по непрерывности на всю область D каждую из функций последовательности $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$ так, что эта продолженная последовательность функций непрерывно сходится в D (а значит, сходится раномерно внутри D).

Наконец, $\widetilde{C}^1$-*устранимое множество* $E \subset D$ характеризуется условием вырожденности в каждой точке $A = (a, a)$, где $a \in E$, предельного множества $C((\varphi_j)_{j=1}^{\infty}, (D \setminus E)^2 \setminus I, A)$, где $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ – произвольно выбранная последовательность функций двух переменных

$$\varphi_j(z, \zeta) = \frac{f_j(z) - f_j(\zeta)}{z - \zeta}, \quad j = 1, 2, \dots ,$$

определённая при $z, \zeta \in D \setminus E$, $z \neq \zeta$, исходя из какой-либо рассматриваемой нами последовательности аналитических функций $\mathscr{F} = (f_j)_{j=1}^{\infty}$.

Основным результатом второго параграфа является следующая

Теорема 3.2.1. *Классы устранимых множеств $\widetilde{AB}$, $\widetilde{C}^1$, $\widetilde{C}$, AB, C^1 и C попарно совпадают.*

В третьем параграфе решается аналогичная задача о продолжении свойства сходимости для последовательностей лишь гомеоморфных отображений – конформных, квазиконформных и более общих.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Носиро К. Предельные множества. – М.: ИЛ, 1963. – 252 с.

[2] Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств. – М.: Мир, 1971. – 312 с.

[3] Ловатер А. Граничное поведение аналитических функций// Итоги науки и техники. Математический анализ. – ВИНИТИ, 1973. – Т.10. – С. 99–259.

[4] Кругликов В. И. Предельные множества последовательности функций. – Донецк: Донец. ун-т, 1981. – 16 с.(Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 5325-81 Деп).

[5] Кругликов В. И. Предельные множества последовательности функций// Докл. РАН. – 1997. – 357, № 1. – С.16–18.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[6] Девятков А. П., Кругликов В. И. О стирании особенностей последовательностей аналитических функций// Докл. РАН. – 2006. – 406, № 5. – С. 591–592.

[7] Девятков А. П., Кругликов В. И. Устранимые особенности последовательностей аналитических функций// Матем. и прикладной анализ. – Тюмень: ТюмГУ, 2005. – Вып. 2. – С. 47–65.

[8] Девятков А. П. О стирании особенностей последовательностей гомеоморфизмов// Вестник ТюмГУ. – 2006. – № 5. – С. 169–172.

[9] Девятков А. П. Две иллюстрации понятия предельного множества последовательности функций// Вестник ТюмГУ. – 2007. – № 5. – С. 3–12.

[10] Девятков А. П., Кругликов В. И. О радиальных предельных множествах последовательностей аналитических функций. – Тюмень: ТюмГУ, 2006. – 16 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 894–В2006).

[11] Девятков А. П. О совпадении предельных множеств последовательностей аналитических функций вдоль различных путей. – Тюмень: ТюмГУ, 2006. – 18 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 1616–В2006).

[12] Девятков А. П., Кругликов В. И. О множествах максимальной неопределённости для последовательностей функций// Матем. и прикладной анализ. – Тюмень: ТюмГУ, 2007. – Вып. 3. – С. 13–18.

[13] Девятков А. П. Устранимые множества для аналитических функций и их последовательностей// Проблемы теоретической и прикладной математики: труды 37-й Региональной молодежной конференции. – Екатеринбург: УрО РАН, 2006. – С. 25–26.

[14] Девятков А. П. Предельные множества, устранимые особенности и граничные значения последовательностей аналитических функций// Материалы XLIV Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс", Математика. – Новосибирск: НГУ, 2006. – С. 9.