На правах рукописи

Стукачева Марина Викторовна

ДИЗЪЮНКТИВНОЕ СВОЙСТВО И КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ В КЛАССЕ РАСШИРЕНИЙ МИНИМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск – 2006

Работа выполнена в лаборатории логических систем Института Математики им. С.Л.Соболева СО РАН

Научные руководители:

доктор физико-математических наук
Белякин Николай Васильевич

кандидат физико-математических наук
Одинцов Сергей Павлович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Будкин Александр Иванович

кандидат физико-математических наук,
доцент Шрайнер Павел Александрович

Ведущая организация:

Новосибирский государственный
технический университет.

Защита диссертации состоится 2 ноября 2006 г. в 14 час. 15 мин. на заседании Диссертационного Совета К 212.174.01 Новосибирского государственного университета по адресу: 630090, г. Новосибирск–90, ул. Пирогова, 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного университета.

Автореферат разослан “___” _________ 2006 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук ___________ А.Д.Больбот

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одним из бурно развивающихся направлений современной неклассической логики является область *паранепротиворечивых логик* — логик, которые допускают противоречивые, но нетривиальные теории. Паранепротиворечивые логики позволяют осуществлять нетривиальные выводы из противоречивого множества гипотез. Логики, в которых все противоречивые теории тривиальны, называют *избыточными*. Объективной основой появления паранепротиворечивых логик является стремление отразить средствами логики специфику мышления человека о переходных состояниях, которые наряду с устойчивостью и относительным покоем наблюдаются в природе, обществе и познании, и в разной степени связаны с логическим понятием противоречивости. Паранепротиворечивая логика связана со многими видами неклассических логик: с модальной логикой (системой **S5** К.Льюиса), с многозначными логиками, с релевантной логикой, где тоже не принимается принцип *ex contraditione quodlibet*: противоречие влечет все, что угодно. Отвергая этот принцип, паранепротиворечивая логика позволяет изучать феномен противоречия сам по себе.

Минимальная логика **Lj** (или, иначе, логика Иоганссона), предложенная И.Иоганссоном в 1936 году в процессе критики принципа "противоречие влечет все, что угодно" в конструктивных рассуждениях, заслуживает особого внимания как паранепротиворечивый аналог интуиционистской логики **Li**. Аксиоматика **Lj** получается вычеркиванием *ex contraditione quodlibet* из стандартного списка аксиом интуиционистской логики, точнее: **Li**=**Lj**+$\{\perp \supset p\}$. В последнее время появились многочисленные работы, посвященные логике Иоганссона, в частности, работы С. Одинцова, в которых изучается класс **JHN** расширений логики **Lj** [**?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**].

В указанных работах найдена одна важная черта, отличающая класс **Lj**-расширений от классов расширений избыточных интуиционистской **Li** и модальной **K4** логик. Класс **JHN** имеет нетривиальную, в некотором смысле трехмерную, глобальную структуру, что позволяет свести его описание, до определенной степени, к хорошо изученным классам промежуточных и позитивных логик. Как оказалось, класс **JHN** является дизъюнктным объединением трех классов: известного класса промежуточных логик **INT**; класса **NEG**, состоящего из негативных логик (дефинициально эквивалентных позитивным), содержащих схему $\neg p$, и класса **PAR** собственно паранепротиворечивых расширений минимальной логики, содержащего все логики, не попавшие в первые два класса. Тот факт, что существует решеточный гомоморфизм решетки **PAR** на прямое произведение **INT** и **NEG** мотивирует попытку исследования связей между логиками указанных классов, обладающими определенными свойствами, в частности, дизъюнктивным свойством (DP).

Проблема дизъюнктивного свойства логик впервые была поднята в связи с рассмотрением частного аспекта: закона исключенного третьего (*tertium non datur*), утверждающего, что одно из двух высказываний φ или $\neg\varphi$ является истинным. Интуиционистская логика основана в результате отказа от закона исключенного третьего. Позже было установлено, что **Li** обладает дизъюнктивным свойством. Впоследствии Лукасевич (1952 г.) высказал гипотезу о том, что дизъюнктивное свойство является характеристическим свойством интуиционистской логики (т.е. интуиционистская логика является единственной промежуточной логикой с DP), что, в свою очередь, индуцировало исследования указанного свойства в классе **INT**. В частности, были выделены логики Крайзеля–Патнема **KP** и Скотта **SL** — первые собственные расширения интуиционистской логики, обладающие дизъюнктивным свойством (см., например, [**?**, **?**]). Кроме того, было показано, что существует континуум промежуточных логик с DP [**?**].

Трудности, с которыми мы столкнулись при работе над результатами о дизъюнктивном свойстве в классе **Lj**-расширений привели, в некотором смысле, к выводу о необходимости пополнения арсенала методов исследования, определенных на классе расширений минимальной логики. Этот факт вполне инициирует введение техники канонических формул как мощного метода исследования расширений логики Иоганссона.

Впервые техника канонических формул была введена М.Захарьящевым для расширений модальной логики **S4** [**?**], а затем синтаксически перенесена на класс промежуточных логик [**?**]. В диссертации техника канонических формул введена для логик класса **JHN**. Кроме того, в работе приводится прямое доказательство аксиоматизируемости произвольного расширения интуиционистской логики **Li** относительно соответствующего класса канонических формул.

Цель работы. Исследовать условия наследования дизъюнктивного свойства логиками класса расширений минимальной логики; распространить технику канонических формул на класс расширений минимальной логики.

Методы исследования. В диссертации использованы семантические и синтаксические методы неклассических логик, такие как, метод канонических моделей, метод фильтрации, слэш Клини, алгебраическая семантика, техника канонических формул.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и снабжены подробными доказательствами.

Основные результаты. В работе получены следующие основные результаты:

1. найдено достаточное условие наследования дизъюнктивного свойства

паранепротиворечивого расширения **L** минимальной логики ее интуиционистским и негативным напарниками; в случае негативного напарника указанное условие состоит в том, что данная паранепротиворечивая логика должна содержать выделенную в диссертации логику **Lf**;

2. для паранепротиворечивой логики **Lf** описана алгебраическая семантика и семантика в терминах шкал Крипке; доказано, что логика **Lf** финитно аппроксимируема, разрешима и обладает дизъюнктивным свойсвом;

3. паранепротиворечивый аналог **Lkp** промежуточной логики Крайзеля–Патнема охарактеризован в терминах шкал Крипке; доказано, что логика **Lkp** финитно аппроксимируема, разрешима и обладает дизъюнктивным свойством;

4. доказано, что соответствующие промежуточной логике с дизъюнктивным свойством и произвольной негативной логике релятивизованная логика Гливенко и свободная комбинация обладают дизъюнктивным свойством. Это определяет два континуальных семейства паранепротиворечивых логик с дизъюнктивным свойством;

5. определены канонические формулы для расширений минимальной логики; доказано, что любое конечно аксиоматизируемое расширение минимальной логики может быть аксиоматизировано конечным числом канонических формул.

Практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее методы и результаты могут быть полезны специалистам в области неклассических логик.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на:

• заседаниях семинаров "Алгебра и логика" и "Нестандартные логики" кафедры алгебры и математической логики механико-математического факультета НГУ,

• международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс"(Новосибиск, 2002),

• международной конференции "Мальцевские чтения"(Новосибирск, 2002, 2004),

• международной конференции Logic Colloquium 2005 (Афины, 2005).

• 9–ой Азиатской конференции по логике (Новосибирск, 2005).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора [**?**]–[**?**].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 32 наименования. Общий объем диссертации составляет 121 страницу. В работе принята двойная нумерация утверждений. Например, номер 2.3 означает, что данное утверждение находится во второй главе и имеет порядковый номер 3.

Содержание диссертации

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, приводятся некоторые известные факты, касающиеся дизъюнктивного свойства в классе промежуточных логик и техники канонических формул, введенной для модальных и промежуточных логик.

В главе 1 приведены основные определения и результаты, которые будут необходимы в последующих главах. Введем те из них, которые используются при формулировке основных результатов.

Рассматриваются пропозициональные логики в языке $\langle \vee, \wedge, \supset, \perp \rangle$, при этом отрицание считается сокращением, $\neg\varphi = \varphi \supset \perp$, где $\perp$ – константа "абсурд". Как обычно, логика – это множество формул, замкнутое относительно правил подстановки и *modus ponens*.

Интуиционистская логика **Li** аксиоматизируется относительно **Lj** аксиомой $\{\perp \supset p\}$. Кроме того,

Lk $=$ **Li** $+ \{p \vee \neg p\}$ — классическая логика,

Ln $=$ **Lj** $+ \{\neg p\}$ — негативная логика,

Lmn $=$ **Lj** $+ \{\neg p\} + \{((p \supset q) \supset p) \supset p\}$ — максимальная негативная логика,

Le $=$ **Lj**$+\{((p \supset q) \supset p) \supset p\}$ — логика классической опровержимости (согласно определения Карри [**?**]),

$\mathcal{F}$ — тривиальная логика, то есть множество всех формул.

Пусть $\mathbf{A}$ — алгебра в сигнатуре $\langle \wedge, \vee, \supset, \perp, 1 \rangle$. Будем называть $\mathbf{A}$-*оценкой* произвольное отображение $V : \{p_0, p_1, ...\} \to A$ из множества пропозициональных переменных в основное множество алгебры $\mathbf{A}$. Каждая $\mathbf{A}$-оценка естественным образом распространяется на множество всех пропозициональных формул. Формула φ *истинна* в $\mathbf{A}$ (является тождеством алгебры $\mathbf{A}$), символически $\mathbf{A} \models \varphi$, если $V(\varphi) = 1$ для любой $\mathbf{A}$-оценки V.

j-алгебрами называются импликативные решетки, рассматриваемые в сигнатуре $\langle \wedge, \vee, \supset, \perp, 1 \rangle$, где $\perp$ интерпретируется как произвольный элемент решетки. Многообразию j-алгебр соответствует минимальная логика **Lj** [**?**, **?**].

Пусть $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, \supset, \perp, 1 \rangle$ — произвольная j-алгебра. Будем называть *верхней алгеброй* (как и в [**?**, **?**]), ассоциированной с j-алгеброй $\mathbf{A}$, алгебру Гейтинга $\mathbf{A}^{\perp}$ с универсумом $A^{\perp} = \{a \in A \mid a \geq \perp\}$ и операциями, индуцированными из $\mathbf{A}$. *Нижней алгеброй*, ассоциированной с j-алгеброй $\mathbf{A}$, называется негативная алгебра $\mathbf{A}_{\perp}$ с универсумом $A_{\perp} = \{a \in A \mid a \leq \perp\}$, операциями $\wedge, \vee$, индуцированными из $\mathbf{A}$, и импликацией, определенной следующим образом: $x \supset_{\perp} y \rightleftharpoons (x \supset y) \wedge \perp$.

В [**?**, **?**, **?**] описывается структура класса расширений минимальной

логики. В частности, пусть **JHN** – класс всех нетривиальных расширений минимальной логики **Lj**, **INT** – класс всех промежуточных логик (т.е. всех расширений **Lj**, для которых справедлив закон $\bot\supset p$),
NEG – класс негативных логик (расширений **Lj**, содержащих аксиому $\neg p$ (или $\bot$)) и $\mathbf{PAR} \rightleftharpoons \mathbf{JHN} - (\mathbf{INT} \cup \mathbf{NEG})$ – класс всех собственно паранепротиворечивых расширений **Lj**.

Предложение 1.1. [?] *Для любой логики $L \in \mathbf{JHN}$ определены следующие равносильности:*

1. $L \in \mathbf{INT} \Leftrightarrow \mathbf{Li} \subseteq L \subseteq \mathbf{Lk}$,
2. $L \in \mathbf{NEG} \Leftrightarrow \mathbf{Ln} \subseteq L \subseteq \mathbf{Lmn}$,
3. $L \in \mathbf{PAR} \Leftrightarrow \mathbf{Lj} \subseteq L \subseteq \mathbf{Le}$.

Для произвольного расширения L минимальной логики определены (см. [?, ?]) *интуиционистский* и *негативный* напарники, а именно:

$$L_{int} = L + \{\bot \supset p\},\ L_{neg} = L + \{\bot\},$$

при этом $L_{int} \in \mathbf{INT}$, $L_{neg} \in \mathbf{NEG}$.

Для $L_1 \in \mathbf{INT}$ и $L_2 \in \mathbf{NEG}$ определяется логика $L_1 * L_2$, называемая *свободной комбинацией* логик L_1 и L_2, а именно:

$$L_1 * L_2 \rightleftharpoons \mathbf{Lj} + \{I(\varphi), \bot\supset \psi \mid \varphi \in L_1, \psi \in L_2\}.$$

Пусть $L_1 \in \mathbf{INT}$ и $L_2 \in \mathbf{NEG}$. Рассмотрим класс логик с фиксированными интуиционистским и негативным напарниками L_1 и L_2 ([?, ?])

$$Spec(L_1, L_2) \rightleftharpoons \{L \supseteq \mathbf{Lj} \mid L_{int} = L_1, L_{neg} = L_2\}.$$

В работе [?] было установлено, что для произвольных $L_1 \in \mathbf{INT}$ и $L_2 \in \mathbf{NEG}$ класс

$$Spec(L_1, L_2) = [L_1 * L_2, L_1 \cap L_2]$$

образует интервал в решетке **JHN**, при этом интервалы вида $Spec$ всегда не пусты, попарно не пересекаются для разных логик L_1, L_2 и

$$\mathbf{JHN} = \bigcup\{Spec(L_1, L_2) \mid L_1 \in \mathbf{INT},\ L_2 \in \mathbf{NEG}\}.$$

Более того, всякий интервал вида $Spec(L_1, L_2)$ бесконечен [?].

Пусть **A** – гейтингова алгебра, **B** – негативная алгебра и отображение $f : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ – полурешеточный гомоморфизм, сохраняющий наибольший элемент и операцию взятия точной нижней грани, т.е. $f(\bot) = 1$,

$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$, $x, y \in \mathbf{B}$. В [?, ?] j-алгебра $\mathbf{A} \times_f \mathbf{B}$ определяется следующим образом: $\mid \mathbf{A} \times_f \mathbf{B} \mid = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{A}, y \in \mathbf{B}, x \leq f(y)\}$, решеточные операции вычисляются покомпонентно, операция импликации задается формулой

$$(x_1, y_1) \supset (x_2, y_2) = ((x_1 \supset x_2) \wedge f(y_1 \supset y_2)), y_1 \supset y_2),$$

единичный элемент $1 = (1_{\mathbf{A}}, 1_{\mathbf{B}})$, противоречие $\bot = (\bot_{\mathbf{A}}, \bot_{\mathbf{B}})$, причем $(\mathbf{A} \times_f \mathbf{B})^{\bot} \simeq \mathbf{A}$, $(\mathbf{A} \times_f \mathbf{B})_{\bot} \simeq \mathbf{B}$. Известно [?], что всякая j-алгебра представима в таком виде.

Будем называть *j-шкалой Крипке* (или просто j-шкалой), тройку $\mu = \langle W, R, Q \rangle$, где W – множество возможных миров, R – отношение достижимости такое, что $\langle W, R \rangle$ – обычная шкала Крипке для интуиционисткой логики, т.е. частично упорядоченное множество, $Q \subseteq W$ – конус относительно R, называемый *конусом ненормальных миров* (подмножество $X \subseteq W$ называется *конусом* относительно отношения R, если из того, что $x \in X$ и xRy следует $y \in X$). Миры, не входящие в Q, называются *нормальными.* Шкала называется *острой*, если она имеет наименьший элемент. Для каждого подмножества $U \subseteq W$ положим:

$$U \uparrow W \rightleftharpoons \{x \in W \mid (\exists y \in U)(yRx)\},$$
$$U \downarrow W \rightleftharpoons \{x \in W \mid (\exists y \in U)(xRy)\}.$$

(В дальнейшем, в случаях, не вызывающих двусмысленности, вместо $U \uparrow W$ и $U \downarrow W$ мы будем писать $U \uparrow$ и $U \downarrow$.) Кроме того, для всяких $U \subseteq W$, $V \subseteq W$ положим:

$$U \supset V {=} \{x \in W \mid \forall y \in W (xRy \text{ и } y \in U \Longrightarrow y \in V)\}.$$

Как обычно, *означивание* V j-шкалы μ – это отображение из множества пропозициональных переменных в множество конусов $Up(W)$. *Модель* $\mathcal{M} = \langle \mu, V \rangle$ – это пара, состоящая из шкалы и ее означивания.

Выполнимость константы $\bot$ на произвольной модели $\mathcal{M} = \langle \mu, V \rangle$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{M} \models_x \bot \Leftrightarrow x \in Q.$$

В остальном, отношение *выполнимости* формул на модели $\mathcal{M}$ определяется аналогично выполнимости на обычных моделях Крипке для интуиционистской логики.

Как обычно, говорим, что формула φ *истинна на модели* $\mathcal{M}{=}\langle \mu, V \rangle$, $\mathcal{M} \models \varphi$, если $\forall x \in W$ выполняется $\mathcal{M} \models_x \varphi$. Формула φ *истинна на j-шкале* μ, $\mu \models \varphi$, если она истинна на модели $\langle \mu, V \rangle$ для произвольного означивания V j-шкалы μ. Формула φ *общезначима* на классе K j-шкал

Крипке, если $\mu \models \varphi$ для любой j-шкалы $\mu \in K$. Говорим, что j-шкала μ является моделью для логики $L \in \mathbf{JHN}$ (обозначаем $\mu \models L$), если $\mu \models \varphi$ для всех $\varphi \in L$. Для логики $L \in \mathbf{JHN}$ и класса j-шкал $\mathcal{K}$ определим

$$Mod(L) \rightleftharpoons \{\mu \mid \mu \models L\},\ L\mathcal{K} \rightleftharpoons \{\varphi \mid \forall \mu \in \mathcal{K}(\mu \models \varphi)\}.$$

Логика L из класса $\mathbf{JHN}$ *полна по Крипке*, если $L = LMod(L)$. Логика $L \in \mathbf{JHN}$ *характеризуется* (или *определяется*) классом j-шкал $\mathcal{K}$, если $L = L\mathcal{K}$. Логика называется *финитно аппроксимируемой*, если она характеризуется классом конечных шкал Крипке.

Глава 2 посвящена дизъюнктивному свойству в классе расширений минимальной логики. Логика L обладает дизъюнктивным свойством (будем писать $L \in DP$), если для любых формул φ, ψ из того, что $(\varphi \vee \psi) \in L$ следует, что $\varphi \in L$ или $\psi \in L$.

Л.Максимова [**?**] рассмотрела алгебраический эквивалент дизъюнктивного свойства для логик полных относительно класса псевдобулевых алгебр. Как оказалось, данный результат легко распространяется и на логики полные относительно классов импликативных решеток, что весьма важно в связи с ранее описанной алгебраической семантикой паранепротиворечивых логик.

Импликативную решетку $\mathbf{A}$ назовем *вполне–связной*, если для любых ее элементов x, y из $x \vee y = 1$ следует $x = 1$ или $y = 1$.

Предложение 2.1. (Алгебраический эквивалент DP для расширений минимальной логики) *Пусть логика L полна относительно класса K импликативных решеток. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *$L \in DP$;*
2. *для любых импликативных решеток $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K$ существует такая вполне–связная импликативная решетка $\mathbf{D}$, что $\mathbf{D} \models L$ и существует гомоморфизм $h : \mathbf{D} \to \mathbf{A} \times \mathbf{B}$.*

Пусть шкалы $\mu_1 = \langle W_1, R_1, Q_1 \rangle$ и $\mu_2 = \langle W_2, R_2, Q_2 \rangle$ такие, что $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, тогда через $\mu_1 + \mu_2$ будем обозначать шкалу $\mu = \langle W, R, Q \rangle$, где $W = W_1 \cup W_2$, $R = R_1 \cup R_2$ и $Q = Q_1 \cup Q_2$. Имеет место следующий семантический критерий дизъюнктивного свойства для расширений минимальной логики аналогичный критерию, предложенному в [**?**] для расширений интуиционистской логики.

Предложение 2.2. (Семантический критерий DP для расширений минимальной логики) *Пусть логика $L \supseteq \mathbf{Lj}$ характеризуется классом $\mathcal{K}$ шкал Крипке. Логика L обладает дизъюнктивным свойством, если* *для любых шкал μ_1, $\mu_2 \in \mathcal{K}$, таких что $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, существует острая шкала $\mu_0 \in \mathcal{K}$, в которой $\mu_1 + \mu_2$ является конусом.*

В параграфе 2.1 этой главы получены результаты, касающиеся условий наследования дизъюнктивного свойства в классах **INT**, **NEG**, **PAR** расширений минимальной логики.

Предложение 2.3. *Если $L \in \mathbf{PAR}$ и $L \in DP$, то $L_{int} \in DP$.*

Введем аксиому **F**: $(\bot \supset p \vee q) \supset (\bot \vee (\bot \supset p) \vee (\bot \supset q))$.

В параграфе 2.1 показывается, что логика $\mathbf{Lf} \rightleftharpoons \mathbf{Lj} + \mathbf{F}$ определяется свойством "быть решеточным гомоморфизмом" для отображений вида $f_{\mathbf{A}}$, а именно, $\mathbf{A} \models \mathbf{Lf} \Longleftrightarrow f_{\mathbf{A}}(x \vee y) = f_{\mathbf{A}}(x) \vee f_{\mathbf{A}}(y)$ для произвольных элементов x, y алгебры $\mathbf{A}$.

Предложение 2.4. *Пусть $L \in \mathbf{PAR}$ и $\mathbf{Lf} \subseteq L$. Тогда если $L \in DP$, то $L_{neg} \in DP$.*

В заключении стоит отметить, что наличие дизъюнктивного свойства у негативного и интуицинистского напарников не гарантирует наличия DP у всех логик соответствующего интервала. Действительно, для любых логик $L_1 \in \mathbf{INT}$, $L_2 \in \mathbf{NEG}$ пересечение $L_1 \cap L_2$ не обладает дизъюнктивным свойством.

Параграф 2.2 второй главы посвящен изучению паранепротиворечивой логики **Lf**. Нам понадобится следующий аналог теоремы Диего для минимальной логики.

Предложение 2.5. *Пусть $\Psi(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ – множество всех формул, построенных из произвольных формул $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ($n \geq 1$) с помощью константы $\bot$ и логических связок $\wedge$, $\supset$. Тогда множество*

$$\Sigma = \{[\varphi] \mid \varphi \in \Psi(\varphi_1, \dots, \varphi_n)\},$$

*где $[\varphi]$ – класс эквивалентности относительно **Lj**, конечно.*

Определим следующий класс конечных шкал Крипке:

$\mathbf{C_f} \rightleftharpoons \{\mu = \langle W, R, Q\rangle \mid$ множество W конечно и $\forall x \in W$ множество $\{x\} \uparrow \cap Q$ либо пустое, либо имеет наименьший элемент$\}$.

Теорема 2.6. *Логика* **Lf** *характеризуется классом* $\mathbf{C_f}$ *конечных* j*-шкал Крипке.*

Следствие 2.7. *Логика* **Lf** *разрешима.*

Теорема 2.1 и семантический критерий дизъюнктивного свойства позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 2.8. *Логика* **Lf** *обладает дизъюнктивным свойством.*

Логика Крайзеля-Патнема **KP**, аксиоматизируемая относительно интуиционистской логики **Li** аксиомой $(\neg p \supset q \vee r) \supset (\neg p \supset q) \vee (\neg p \supset r)$, стала первой логикой опровергающей гипотезу Лукасевича о том, что дизъюнктивное свойство является характеристическим для интуиционистской логики [**?**]. В параграфе 2.3 определяется характеризация логики **Lkp** — паранепротиворечивого аналога логики Крайзеля-Патнема в терминах шкал Крипке.

Пусть $\mu{=}\langle W, R, Q\rangle$ – j-шкала Крипке с наименьшим элементом $o \in W$.

Будем говорить, что множество U обладает свойством $\#$, если и только если $\forall E \subseteq U$ выполняется

множество $U \setminus ((E \uparrow \setminus Q) \downarrow)$ либо пустое, либо имеет наименьший элемент.

Определим следующий класс конечных j-шкал Крипке $\mathbf{C_{kp}}$:

$\mathbf{C_{kp}} \rightleftharpoons \{\mu{=}\langle W, R, Q\rangle \mid \mu$ – конечная острая шкала и удовлетворяет условию $(\star)$:$\forall z \in W$ множество $\{z\}\uparrow$ обладает свойством $\#$ (в частности $\{o\}\uparrow{=}W$ обладает свойством $\#$)$\}$.

Теорема 2.9. *Логика* **Lkp** *характеризуется классом* $\mathbf{C_{kp}}$ *конечных* j*-шкал Крипке.*

В диссертации показано, что логика **Lkp** разрешима и обладает дизъюнктивным свойством.

В параграфе 2.4 этой главы определяются два континуальных класса собственно паранепротиворечивых расширений минимальной логики с дизъюнктивным свойством.

Пусть $L \in \mathbf{JHN}$. Индукцией по длине формулы φ определим выражение $|_L\, \varphi$ (“слэш Клини”) аналогично тому, как это было сделано в [**?**, **?**] для промежуточных и модальных логик (далее вместо “$|_L\, \varphi$ и $\vdash_L \varphi$” будем писать $| \vdash_L \varphi$):

$|_L\, \varphi \ \leftrightharpoons \vdash_L \varphi$, где φ – атомная формула;

$|_L\, \varphi \wedge \psi \rightleftharpoons |_L\, \varphi$ и $|_L\, \psi$;
$|_L\, \varphi \vee \psi \rightleftharpoons |\vdash_L \varphi$ или $|\vdash_L \psi$;
$|_L\, \varphi \supset \psi \rightleftharpoons [\, |\vdash_L \varphi \Rightarrow |_L\, \psi\,]$.

Предложение 2.10. *Пусть $L_1 \in$ **INT**, $L_2 \in$ **NEG** и $L_1 \in DP$. Если $\vdash_{L_1 * L_2} \varphi$, то $|_{L_1 * L_2}\, \varphi$.*

Последнее предложение дает возможность определить условие наследования дизъюнктивного свойства свободной комбинацией логик.

Предложение 2.11. *Пусть $L_1 \in$ **INT**, $L_2 \in$ **NEG** и $L_1 \in DP$. Тогда свободная комбинация $L_1 * L_2$ обладает дизъюнктивным свойством.*

В работах [**?**, **?**, **?**] рассматривается так называемая *логика Гливенко* $\mathbf{Lg} = \mathbf{Lj} + \{\neg\neg(\bot \supset p)\}$ – наименьшая среди логик L, удовлетворяющих известной теореме Гливенко:

$$\text{для любой формулы } \varphi,\ \mathbf{Lk} \vdash \varphi \iff L \vdash \neg\neg\varphi.$$

Релятивизованная логика Гливенко $G(L_1, L_2)$ в интервале $Spec(L_1, L_2)$ определяется в [**?**, **?**] следующим образом:

$$G(L_1, L_2) = L_1 * L_2 + \{\neg\neg(\bot \supset p)\},$$

где $L_1 \in \mathbf{INT}$, $L_2 \in \mathbf{NEG}$.

Предложение 2.12. *Пусть $L_1 \in$ **INT**, $L_2 \in$ **NEG**, $L_1 \in DP$ и $G = G(L_1, L_2)$. Если $\vdash_G \varphi$, то $|_G\, \varphi$.*

Предложение 2.13. *Пусть $L_1 \in$ **INT**, $L_2 \in$ **NEG** и $L_1 \in DP$. Тогда релятивизованная логика Гливенко $G(L_1, L_2)$ обладает дизъюнктивным свойством.*

Таким образом, мы нашли еще один класс собственно паранепротиворечивых расширений **Lj** с дизъюнктивным свойством мощности континуум. Как и в случае свободной комбинации, дизъюнктивное свойство описанного выше класса релятивизованных логик не зависит от дизъюнктивного свойства их негативных напарников.

Перейдем к главе 3. Как было отмечено ранее, всякий интервал вида $Spec(L_1, L_2)$ бесконечен [**?**], поэтому нередко расположение логики $L \in \mathbf{JHN}$ внутри соответствующего интервала определяется сложными условиями, затрудняющими исследование моделей и свойств логики L известными семантическими методами.

Техника канонических формул, предложенная М.Захарьящевым в [?] для случая расширений модальной логики **S4**, позволяет по всякой конечно аксиоматизируемой логике указанного класса построить семейство контрмоделей особого вида и охарактеризовать данную логику с помощью канонических формул, сопоставляемых этим контрмоделям. В работе [?] устанавливается связь между каноническими аксиоматизациями произвольного расширения **S4** и его суперинтуиционистского фрагмента, что дает возможность перенести технику канонических формул на класс промежуточных логик.
В связи с тем, что не существует общепринятой трансляции минимальной логики **Lj** в модальную **S4**, аналогичной известной трансляции интуиционистской логики в модальную, приходится искать прямое доказательство аксиоматизируемости произвольного **Lj**-расширения соответствующими каноническими формулами.
В главе 3 техника канонических формул обобщается для логик класса **JHN**. Кроме того, в качестве первых приложений этой техники описываются модели паранепротиворечивых аналогов двух известных промежуточных логик.

Модельной структурой будем называть систему $\mathfrak{M}=\langle W, R, Q, S\rangle$, где
• $\mu = \langle W, R, Q\rangle$— j-шкала;
• S— некоторая система подмножеств W такая, что $S \subseteq Up(W)$, $\emptyset \in S$, $Q \in S$, $W \in S$ и S замкнуто относительно $\cap$, $\cup$ и операции $\supset$, определенной ранее.

Пусть $\mathfrak{M}=\langle W, R, Q, S\rangle$— произвольная модельная структура. *Модель на модельной структуре* $\mathfrak{M}$ определим как $\mathcal{M}=\langle \mathfrak{M}, V\rangle$, где $V : Prop \longrightarrow S$. Заметим, что означивание V может рассматриваться и как $\mathbf{A}_{\mathfrak{M}}$–оценка, где $\mathbf{A}_{\mathfrak{M}}=\langle S, \cap, \cup, \supset, Q, W\rangle$. Определим отношение $\models$ индуктивно следующим образом:

1. $\mathcal{M} \models_a p_i \iff a \in V(p_i)$,

2. $\mathcal{M} \models_a \varphi \wedge \psi \iff \mathcal{M} \models_a \varphi$ и $\mathcal{M} \models_a \psi$,

3. $\mathcal{M} \models_a \varphi \vee \psi \iff \mathcal{M} \models_a \varphi$ или $\mathcal{M} \models_a \psi$,

4. $\mathcal{M} \models_a \varphi \supset \psi \iff \forall x \in W(aRx$ и $x \models \varphi \Rightarrow x \models \psi)$,

5. $\mathcal{M} \models_a \perp \iff a \in Q$.

Модель можно рассматривать и как пару $\langle \mathfrak{M}, \models\rangle$, где отношение $\models$ между элементами W и формулами удовлетворяет условиям 2-5 и

$1'$. $\{a \mid a \models p\} \in S$.

Пусть $\mathfrak{M}_1{=}\langle W_1, R_1, Q_1, S_1\rangle$— модельная структура, $\mu{=}\langle W, R, Q\rangle$— конечная j-шкала модельной структуры $\mathfrak{M}{=}\langle \mu, Up(W)\rangle$.
Частичным p-морфизмом из $\mathfrak{M}_1$ на μ будем называть всякое частичное отображение f из W_1 на W, удовлетворяющее условиям:

$1'$. $(\forall a, b \in f^{-1}(W))(aR_1b \Longrightarrow f(a)Rf(b))$;

2. $(\forall x, y \in W)(xRy \Longrightarrow (\forall a \in f^{-1}(x))(\exists b \in f^{-1}(y))(aR_1b))$;

5. $(\forall x \in W)(W_1 \backslash (f^{-1}(x)\downarrow) \in S_1)$;

6. $f^{-1}(Q) \subseteq Q_1$.

Модельную структуру $\mathfrak{M}_1{=}\langle W_1, R_1, Q_1, S_1\rangle$ называем *допустимой для конечной контрмодели* $\mathcal{M}{=}\langle W, R, Q, Up(W), \models\rangle$ формулы φ_0, если существует частичный p-морфизм f из $\mathfrak{M}_1$ на $\langle W, R, Q\rangle$, удовлетворяющий следующим условиям

$(*)$ $\forall a \in f^{-1}(W)\uparrow$:

если набор $f(a\uparrow)$ не пуст, то набор $f(a\uparrow)$ открыт в $\mathcal{M}$;

$(**)$ $a \in f^{-1}(W)\uparrow \backslash Q_1 \Longrightarrow a \in f^{-1}(W \setminus Q)\downarrow$.

Теорема 3.1. *Формула φ_0 опровержима на модельной структуре $\mathfrak{M}_1$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_1$ допустима для некоторой контрмодели $\mathcal{M} \in \sum_{\varphi_0}$, где $\sum_{\varphi_0}$ – множество всех конечных контрмоделей $\langle W, R, Q, Up(W), \models\rangle$ формулы φ_0 с острыми шкалами.*

Далее рассмотрим конечную j-шкалу общего вида $\mu = \langle W, R, Q\rangle$, в которой $e_0, ..., e_n$ – все ее различные элементы, причем e_0 – наименьший, $e_0, ..., e_m \notin Q$, $0 \le m \le n$, $e_{m+1}, ..., e_n \in Q$.

Дизъюнктивной областью шкалы $\mu = \langle W, R, Q\rangle$ (в дальнейшем *d-областью*) будем называть всякую пару $(\overline{x}, \overline{y}) = \delta$ не пустых наборов элементов из W, удовлетворяющих условиям:

1. в каждом из наборов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ элементы попарно не сравнимы, $|\overline{x}| \ge 2$;
2. $(\forall x \in \overline{x})(\forall y \in \overline{y})(\neg xRy)$;

3. $(\forall z \in W)(z \in \bigcap_{x\in\overline{x}} x \downarrow \Longrightarrow z \in \bigcup_{y\in\overline{y}} y \downarrow)$.

Пусть $\mathcal{D}$ – некоторое (возможно пустое) множество дизъюнктивных областей шкалы $\langle W, R, Q\rangle$. Через $\mathcal{D}_1$ обозначим множество d-областей, в которых $\overline{y}\cap(W\backslash Q) \neq \emptyset$, а через $\mathcal{D}_2$ множество тех d-областей, в которых $\overline{y} \subseteq Q$. Очевидно, что $\mathcal{D}{=}\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$.

Построим по $\mu = \langle W, R, Q\rangle$ и $\mathcal{D}$ **формулу**

$$J(\mu, \mathcal{D}) \rightleftharpoons (\bigwedge_{e_i R e_j} A_{ij}) \wedge (\bigwedge_{\delta\in\mathcal{D}} B_\delta) \wedge C \supset p_0,$$

где

$$C = \bigwedge_{i=1}^{m} (\wedge\Gamma_i \supset p_i \vee \bot) \supset \bot;$$

$$\Gamma_j = \{p_k \mid \neg e_j R e_k\};$$

и

- если $\delta = (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{D}_1$, то

  $$B_\delta{=}\bigwedge_{e_i\in\overline{y}, e_i\notin Q}(\wedge\Gamma_i \supset p_i \vee \bot) \wedge \bigwedge_{e_i\in\overline{y}, e_i\in Q}(\wedge\Gamma_i \wedge \bot \supset p_i) \supset \bigvee_{e_j\in\overline{x}} p_j,$$

  (при этом, если $\overline{y}{\cap}Q{=}\emptyset$, то второй конъюнктивный член отсутствует);

- если $\delta = (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{D}_2$, то

  $$B_\delta{=}\bigwedge_{e_i\in\overline{y}}(\wedge\Gamma_i \wedge \bot \supset p_i) \supset \bigvee_{e_j\in\overline{x}} p_j;$$

а формула A_{ij} определяется следующим образом:

- если $e_i \notin Q$, $e_j \notin Q$, то $A_{ij}{\rightleftharpoons}(\wedge\Gamma_j \supset p_j \vee \bot) \supset p_i$;
- если $e_i \notin Q$, $e_j \in Q$, то $A_{ij}{\rightleftharpoons}(\wedge\Gamma_j \wedge \bot \supset p_j) \supset p_i$;
- если $e_i \in Q$, $e_j \in Q$, то $A_{ij}{\rightleftharpoons}(\wedge\Gamma_j \supset p_j) \supset p_i$.

Построенная формула в случае $Q = \emptyset$ полностью совпадает с формулой $X(\mu, \mathcal{D}, \bot)$, построенной в [**?**] для промежуточных логик.

В случае, когда j-шкала $\mu{=}\langle W, R, Q\rangle$ является ненормальной ($W = Q$, $e_0, ..., e_n$ – все ее различные элементы, причем e_0 – наименьший), формула $J(\mu, \mathcal{D})$ принимает следующий вид:

$$J_{W=Q}(\mu,\mathcal{D}) \rightleftharpoons (\bigwedge_{e_i R e_j} A_{ij}) \wedge (\bigwedge_{\delta\in\mathcal{D}_2} B_\delta) \wedge \bot \supset p_0,$$

где

$$A_{ij} \rightleftharpoons (\wedge\Gamma_j \supset p_j) \supset p_i,$$

и если $\delta = (\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{D}_2$, то

$$B_\delta = \bigwedge_{e_i\in\overline{y}} (\wedge\Gamma_i \wedge \bot \supset p_i) \supset \bigvee_{e_j\in\overline{x}} p_j.$$

Пусть $\mathfrak{M}_1 = \langle W_1, R_1, Q_1, S_1\rangle$ – модельная структура, а $\mu = \langle W, R, Q\rangle$ – конечная j-шкала. Модельная структура $\mathfrak{M}_1$ называется *допустимой для формулы* $J(\mu,\mathcal{D})$, если существует частичный p-морфизм $f\colon \mathfrak{M}_1 \longrightarrow \langle W, R, Q\rangle$, удовлетворяющий условиям:

(A) если $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{D}$ и $c \in f^{-1}(W)\uparrow$, то
$c \in \bigcap_{x\in\overline{x}} (f^{-1}(x)\downarrow) \Longrightarrow c \in \bigcup_{y\in\overline{y}} (f^{-1}(y)\downarrow)$;

(B) $c \in f^{-1}(W)\uparrow \setminus Q_1 \Longrightarrow c \in f^{-1}(W\setminus Q)\downarrow$.

Теорема 3.2. $\mathfrak{M}_1 \not\vDash J(\mu,\mathcal{D})$ *тогда и только тогда, когда модельная структура* $\mathfrak{M}_1$ *допустима для формулы* $J(\mu,\mathcal{D})$.

Теорема 3.3. *По каждой формуле* φ *можно построить канонические формулы* $J(\mu_1,\mathcal{D}^1)$, …, $J(\mu_n,\mathcal{D}^n)$ *(*$n \geq 0$*) такие, что*

$$\mathbf{Lj}+\varphi = \mathbf{Lj}+J(\mu_1,\mathcal{D}^1) + \ldots + J(\mu_n,\mathcal{D}^n).$$

Параграф 3.4 данной главы посвящен описанию через канонические формулы всех контрмоделей паранепротиворечивого аналога промежуточной логики Скотта $\mathbf{Ls}=\mathbf{Li}+\{(\neg\neg p \supset p) \supset p \vee \neg p) \supset \neg p \vee \neg\neg p\}$ и, кроме того, доказательству финитной аппроксимируемости логики $\mathbf{Lskp}=\mathbf{Lkp}+\mathbf{Ls}$, промежуточный аналог которой исследовался в [**?**].

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям Сергею Павловичу Одинцову и Николаю Васильевичу Белякину за постановку задач, постоянную поддержку и внимание к работе, ценные замечания и плодотворные обсуждения.

Список литературы

[1] *Захарьящев М.В.* Синтаксис и семантика модальных логик, содержащих $S4$ // Алгебра и логика. – 1988. – Т. 27, No 6. – Стр. 659–689.

[2] *Захарьящев М.В.* Синтаксис и семантика суперинтуиционистских логик // Алгебра и логика. – 1989. – Т. 28, No 4. – Стр. 402–429.

[3] *Расева Е., Сикорский Р.* Математика метаматематики. – Москва: Наука, 1972. – 592 стр.

[4] *Arruda A.* A Survey of Paraconsistent Logic: Mathematical Logic in Latin America (Ed. by Arruda A., Chuaqui R., Da Casta N.C.) // Proc. Symp., Santiago, 1978. – P. 1–41.

[5] *Božic M., Došen K.* Models for Normal Intuitionistic Modal Logics // Studia Logica. – 1984. – Vol. 43, No 1. – P. 217–245.

[6] *Burris S., Sankappanavar H.* A course in universal algebra. – New York: Springer, 1981. – 276 p.

[7] *Chagrov A., Zakharyaschev M.* The Disjunction Property of intermediate propositional logics // Studia Logica. – 1986. – Vol. 45, No 1. – P. 189–215.

[8] *Chagrov A., Zakharyaschev M.* The undecidability of the Disjunction Property of propositional logics and other related problems // The Journal of symbolic Logic. – 1993. – Vol. 58, No 3. – P. 967–1002.

[9] *Chagrov A., Zakharyaschev M.* Modal Logic. – Oxford: Clarendon press, 1997. – 605 p.

[10] *Curry H.* Foundations of mathematical logic. – New York: McGrow-Hill Book Company, 1963. – 498 p.

[11] *Gabbay D.M.* The decidability of the Kreisel-Putnam system // The Journal of symbolic Logic. – 1970. – Vol. 35, No 1. – P. 54–63.

[12] *Gabbay D.M., De Jong D.H.J.* A sequence of decidable finitely axiomatazible intermediate logics with the disjunctive property // The Journal of symbolic Logic. – 1974. – Vol. 39, No 1. – P. 67–78.

[13] *Jankov V.A.* Relationship between deducibility in the intuitionistic propositional calculus and finite implicational structures // Soviet Mathematics Doklady. – 1963. – Vol. 8. – P. 1203–1204.

[14] *Maksimova L.L.* On maximal intermediate propositional logic with the Disjunction property // Studia Logica. – 1986. – Vol. 45, No 1. – P. 69–75.

[15] *Minari P.* On the extensions of intuitionistic propositional logic with Kreisel-Putnam's and Scott's schemes // Studia Logica. – 1986. – Vol. 45, No 1. – P. 55–68.

[16] *Odintsov S.P.* Maximal paraconsistent extension of Johansson logic // Logique at Analyse. – 1998. – Vol. 161–162–163. – P. 107–120.

[17] *Odintsov S.P.* Representation of j-algebras and Segerberg's logics // Logique at Analyse. – 1999. – Vol. 165–166. – P. 81–106.

[18] *Odintsov S.P.* Algebraic semantics and Kripke semantics for extensions of minimal logic // Logical investigations (electronic journal). – 1999. – Vol. 2. – `http://www.logic.ru/LogStud/02/No2-06.html`

[19] *Odintsov S.P.* Logic of classical refutability and class of extensions of minimal logic // Logic and Logical Philosophy. – 2001. – Vol. 9. – P. 91–107.

[20] *Odintsov S.P.* On the Structure of Paraconsistent Extensions of Johansson's Logic (extended abstract) // CLE-e-prints (electronic resource). – 2002. – Vol. 2. – `http://cle.unicamp.br/e-prints`

[21] *Odintsov S.P.* On the structure of paraconsistent extensions of Johansson's logic // Journal of Applied Logic. – 2005. – Vol. 3, No 1. – P. 43–65.

[22] *Rasiowa H.* An algebraic approach to non-classical logics. – Amsterdam: North-Holland, 1974. – 403 p.

[23] *Segerberg K.* Propositional Logics Related to Heyting's and Johansson's // Theoria. – 1968. – Vol. 34. – P. 26–61.

[24] *Wronski A.* Intermediate logics and the disjunction property // Reports on Mathematical Logic. – 1973. – Vol. 1. – P. 39–51.

[25] *Woodruff P.* A note on JP' // Theoria. – 1970. – Vol. 36. – P. 183–184.

Работы автора по теме диссертации

[26] *Стукачева М.В.* О дизъюнктивном свойстве одного паранепротиворечивого расширения минимальной логики // Материалы XL международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс”: Математика. – Новосибирск, 2002. – Стр. 20–21.

[27] *Стукачева М.В.* О дизъюнктивном свойстве паранепротиворечивого аналога логики Крайзеля–Патнема // Труды XXXIV ргиональной молодежной школы-конференции “Проблемы теоретической и прикладной математики”. – Екатеринбург, 2003. – Стр. 54–57.

[28] *Стукачева М.В.* О дизъюнктивном свойстве в классе паранепротиворечивых расширений минимальной логики // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43, No 2. – Стр. 235–252.

[29] *Стукачева М.В.* Некоторые замечания о конструктивных расширениях минимальной логики // Вестник Новосибирского государственного университета, серия: Математика, механика, информатика. – 2005. – Т. 5, No 3. – Стр. 3–16.

[30] *Стукачева М.В.* О канонических формулах для расширений минимальной логики // Сибирские электронные математические известия. – 2006. – Т. 3. – Стр. 312–334. – http://semr.math.nsc.ru

[31] *Stukacheva M.* About canonical formulas for paraconsistent extensions of minimal logic // Logic Colloquium, Abstracts. – Athens, 2005. – P. 120.

[32] *Stukacheva M.* On canonical formulas for extensions of minimal logic // The Bulletin of Symbolic Logic. – 2006. – Vol. 12, No 2. – P. 348.

Стукачева Марина Викторовна

ДИЗЪЮНКТИВНОЕ СВОЙСТВО И КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ В КЛАССЕ РАСШИРЕНИЙ МИНИМАЛЬНОЙ ЛОГИКИ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Подписано в печать	Формат 60 x 84 1/16
Печать офсетная	Усл. печ. л. 1.0
Заказ №	Тираж 100 экз.

Лицензия ЛР №021285 от 6 мая 1998 г.
Отпечатано на полиграфическом участке НГУ,
630090, Новосибирск–90, ул.Пирогова 2