На правах рукописи

Рубан Евгения Владимировна

ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ОБЛАСТИ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск 2011

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук Институте гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения РАН

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент, чл.-корр. РАН П. И. Плотников
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Г. В. Алексеев
	доктор физико-математических наук, профессор В. В. Шелухин
Ведущая организация:	Учреждение Российской академии наук Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН

Защита состоится ... . 2011 года в ... часов ... минут на заседании диссертационного совета Д 212.174.02 при Новосибирском государственном университете по адресу: 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного университета.

Автореферат разослан ... . 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук Н. И. Макаренко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В диссертации исследуется вопрос об оптимизации формы области течения в случае установившегося движения вязкого сжимаемого баротропного газа. Предполагается, что газ занимает односвязную область $\Omega = B \backslash S$ с границей $\partial\Omega \in C^\infty$, где $B \subset \mathbb{R}^3$ - внешняя область с границей $\Sigma = \partial B$, а $S \subset\subset B$ - компактная подобласть. Скорость газа совпадает с заданным векторным полем $\mathbf{U} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)^3$ на поверхности Σ и равна нулю на ∂S. В этих предположениях границу области течения Ω можно разделить на три части: область втекания $\Sigma_{\rm in}$, область вытекания $\Sigma_{\rm out}$ и характеристическое множество Σ_0, которые определены следующим образом:

$$\Sigma_{\rm in} = \{x \in \partial\Omega : \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} < 0\}, \quad \Sigma_{\rm out} = \{x \in \partial\Omega : \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} > 0\}, \qquad (1)$$

$\Sigma_0 = \{x \in \partial\Omega : \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0\}$, где $\mathbf{n}$ - внешняя нормаль к $\partial\Omega = \Sigma \cup \partial S$.

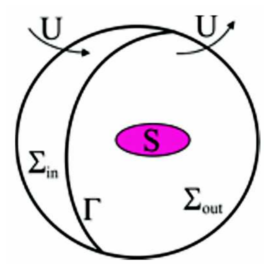

Рис. 1.

Таким образом, характеристическое многообразие $\Gamma =: (\mathrm{cl}\,(\Sigma_{\rm in})) \cap (\mathrm{cl}\,(\Sigma_{\rm out} \cup \Sigma_0))$ делит поверхность Σ на три непересекающиеся части $\Sigma_{\rm in}$, $\Sigma_{\rm out}$ и Γ. Задача состоит в том, чтобы отыскать поле скоростей $\mathbf{u}$ и плотность газа ϱ, удовлетворяющие следующим уравнениям и краевым условиям, записанным в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{u} + \lambda\nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = R\varrho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \frac{R}{\epsilon^2}\nabla p(\varrho) \;\; \text{в} \;\; \Omega, \\ \mathrm{div}(\varrho\mathbf{u}) = 0 \;\; \text{в} \;\; \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{U} \;\; \text{на} \;\; \Sigma, \quad \mathbf{u} = 0 \;\; \text{на} \;\; \partial S, \\ \varrho = \varrho_0 \;\; \text{на} \;\; \Sigma_{\rm in}, \end{aligned} \qquad (2)$$

где давление $p = p(\varrho)$ - гладкая строго монотонная функция плотности, ϵ - число Маха, R - число Рейнольдса, ϱ_0 - положительная константа, $\lambda = 1/3 + \nu_2/\nu_1$, где ν_1 - коэффициент динамической вязкости, ν_2 - объемная вязкость.

Основные результаты о глобальном существовании слабых (обобщенных) решений однородных краевых задач для уравнений Навье-Стокса динамики вязкого сжимаемого газа представлены в монографиях E. Feireisl'a, P. L. Lions'a, A. Novotny, I. Stravskraba. Существование и единственность обобщенных решений однородных краевых задач для стационарных уравнений Навье-Стокса динамики вязкого сжимаемого газа доказана в работах J. Frehse, S. Goj, M. Steinhauer, П. И. Плотникова, Я. Соколовского и др. Результаты о локальном существовании и единственности сильных решений данных задач представлены в работах A. Novotny, I. Stravskraba, M. Padula и др. В работах J. R. Kweon'a и R. B. Kellogg'a получены результаты о локальном существовании и единственности решений неоднородных краевых задач для данных уравнений в двухмерном случае в предположении, что на границе области скорость $\mathbf{u}$ близка к заданному постоянному вектору.

Вопрос о существовании сильных решений неоднородных краевых задач для стационарных уравнений Навье-Стокса динамики вязкого сжимаемого газа в трехмерной области с гладкой границей до сих пор не исследован до конца ввиду того, что существует ряд сложностей в решении данной задачи, включая проблему контроля общей массы газа, а также проблему слабой сингулярности решения на характеристическом многообразии Г. В предположении малости числа Маха, числа Рейнольдса и отношения коэффициентов динамической и объемной вязкости в диссертации исследуется разрешимость задачи (2) в пространствах Соболева $W^{s,r}(\Omega)$ с вещественным индексом s.

Одними из первых работ, посвященных исследованию задач оптимального управления и управляемости для уравнений Навье-Стокса, являются работы А. В. Фурсикова, F. Abergel'a, R. Temam'a, M. D. Gunzburger'a, L. Hou. В работах Г. В. Алексеева, Д. А. Терешко, R. Becker'a, B. Vexler'a, K. Ito и S. S. Ravindran'a исследованы задачи оптимального управления для стационарного уравнения конвекции-диффузии, экстремальные задачи для стационарной модели массопереноса и задачи оптимального управления для стационарных уравнений тепловой конвекции.

В диссертации рассматривается задача о минимизации силы сопротивления $\mathbf{J}(S)$, действующей на твердое неподвижное тело S, обтекаемое потоком газа, скорость которого на внешней границе Σ области течения $\Omega = B\backslash S$ равна постоянному вектору $\mathbf{U}_\infty$. Гидродинамическая сила $\mathbf{J}(S)$ определена следующей формулой:

$$\mathbf{J}(S) = -\int_{\partial S} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^* + (\lambda - 1)(\operatorname{div} \mathbf{u})\mathbf{I} - \frac{R}{\epsilon^2} p(\varrho)\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} dS,$$

где $\mathbf{I}$ - единичная матрица размера 3×3, $\mathbf{n}$ - внешняя единичная нормаль к ∂S. Функционалом сопротивления $J_D(S)$ является компонента $\mathbf{J}$, параллельная $\mathbf{U}_\infty$,

$$J_D(S) = \mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{J}(S). \tag{3}$$

Зависимость решений краевых задач для нестационарных уравнений Навье-Стокса динамики вязкого сжимаемого газа от формы области течения и разрешимость задачи оптимизации формы области исследовались в работах E. Feireisl'a, A. Novotny, H. Petzeltova. В случае, когда течение является стационарным, вопрос оптимизации формы области течения исследовался П. И. Плотниковым, Я. Соколовским и другими авторами.

В работах J. A. Bello, E. Fernandez-Cara, J. Lemoine и J. Simon'a доказано существование производных по области решений краевой задачи для стационарных уравнений Навье-Стокса динамики вязкого несжимаемого газа и получена формула для производной по области функционала сопротивления. В случае, когда течение описывается стационарными уравнениями Навье-Стокса динамики вязкого сжимаемого газа, подобных результатов в литературе не было представлено. В диссертации исследуется дифференцируемость решения задачи (2) по области, а также выводится формула для производной по области функционала сопротивления.

Цель работы. Основной целью диссертации является исследование разрешимости задачи (2), доказательство дифференцируемости по области решений данной задачи, а также вывод формулы для производной по области функционала сопротивления.

Методы исследования. Для доказательства существования решения применяются теоремы о неподвижных точках, а также результаты о разрешимости краевых задач для уравнений Стокса, теоремы вложения для пространств Соболева, теория О. А. Олейник и Е. В. Радкевича краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой и некоторые факты из интерполяционной теории. При доказательстве дифференцируемости решения задачи (2) по области используется понятие очень слабого решения.

Основные результаты.

1. Доказана теорема о локальном существовании и единственности сильных решений задачи (2) в пространствах Соболева $W^{s,r}(\Omega)$ с вещественным индексом s.
2. Доказана дифференцируемость решения задачи (2) по области.
3. Получена формула для производной по области функционала сопротивления.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми, их достоверность устанавливается строгими математическими доказательствами.

Теоретическая и практическая ценность. В диссертации доказана локальная теорема существования и единственности решений задачи (2), доказана дифференцируемость по области решения данной задачи, получена формула для производной по области функционала сопротивления, которая явным образом зависит от нормального возмущения формы обтекаемого препятствия, заданного на его поверхности, и может быть использована для нахождения оптимальной формы области течения. Практическая ценность работы вытекает из возможных приложений результатов диссертации путем построения численных алгоритмов для вычисления производной по области функционала сопротивления.

Апробация работы. Результаты, вошедшие в диссертацию, докладывались и обсуждались на XLII и XLIII Международных научных студенческих конференциях "Студент и научно-технический прогресс"(Новосибирск, 2004, 2005 г.), на Всероссийских конференциях "Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа (САМГОП)"(Абрау-Дюрсо, 2004 г.), "Актуальные проблемы прикладной математики и механики (АФСИД)" (Абрау-Дюрсо, 2004 г.).

Основные результаты диссертации обсуждались на семинаре "Математические проблемы механики сплошной среды" под руководством чл.-корр. РАН П. И. Плотникова в ИГиЛ СО РАН, семинаре "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы анализа" под руководством проф. В. С. Белоносова и проф. М. В. Фокина в ИМ СО РАН, семинаре "Теоретические и вычислительные проблемы задач математической физики" под руководством проф. А. М. Блохина в ИМ СО РАН, семинаре "Групповой анализ дифференциальных уравнений" под руководством академика Л. В. Овсянникова и проф. А. П. Чупахина в ИГиЛ СО РАН.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] - [7]. В совместных публикациях вклад авторов является равным.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на параграфы, двух иллюстраций и списка литературы. Объем работы 148 страниц. Список литературы состоит из 67 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во введении дается краткий обзор литературы и излагаются основные результаты диссертации.

В первой главе приводятся основные определения и обозначения, а также известные результаты, которые используются в работе.

Пусть A_0 и A_1 - пространства Банаха. Для $t > 0$ введем две неотрицательные функции $K : A_0 + A_1 \mapsto \mathbb{R}$ и $J : A_0 \cap A_1 \mapsto \mathbb{R}$, определенные следующим образом:

$$K(t,u,A_0,A_1) = \inf_{\substack{u = u_0 + u_1 \\ u_i \in A_i}} \|u_0\|_{A_0} + t\|u_1\|_{A_1},$$

$$J(t,u,A_0,A_1) = \max_{u \in A_0 \cap A_1} \{\|u\|_{A_0}, t\|u\|_{A_1}\}.$$

Для любых $s \in (0,1)$, $1 < r < \infty$, K-интерполяционное пространство $[A_0, A_1]_{s,r,K}$ является пространством Банаха и состоит из всех элементов $u \in A_0 + A_1$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{[A_0,A_1]_{s,r,K}} = \Big(\int_0^\infty t^{-1-sr} K(t,u,A_0,A_1)^r \, dt\Big)^{1/r}. \tag{4}$$

С другой стороны, J-интерполяционное пространство $[A_0, A_1]_{s,r,J}$ является пространством Банаха и состоит из всех элементов $u \in A_0 + A_1$, имеющих представление

$$u = \int_0^\infty \frac{v(t)}{t}\, dt, \quad v(t) \in A_1 \cap A_0 \ \text{ при } \ t \in (0, \infty), \tag{5}$$

и конечную норму

$$\|u\|_{[A_0,A_1]_{s,r,J}} = \inf_{v(t)} \big(\int_0^\infty t^{-1-sr} J(t, v(t), A_0, A_1)^r \, dt \big)^{1/r}, \tag{6}$$

где инфимум берется по множеству всех $v(t)$, удовлетворяющих (5).

1.1.1. Предложение. *Для всех $s \in (0,1)$ и $r \in (1,\infty)$ пространства $[A_0, A_1]_{s,r,K}$ и $[A_0, A_1]_{s,r,J}$ топологически и алгебраически изоморфны.*

Таким образом, введенные нормы (6) и (4) эквивалентны и индексы J и K можно опустить.

Пусть $\Omega = \mathbb{R}^d$ или $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ - ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^1$, $d \geq 1$ - целое число.

1.2.1. Предложение. *Для $0 < s < 1$, $r \in [1, \infty)$ пространство Соболева $W^{s,r}(\Omega)$ получается методом вещественной интерполяции пространств $L^r(\Omega)$ и $W^{1,r}(\Omega)$ и состоит из всех измеримых функций с конечной нормой*

$$\|u\|_{W^{s,r}(\Omega)} = \|u\|_{L^r(\Omega)} + |u|_{s,r,\Omega},$$

$$\textit{где} \quad |u|^r_{s,r,\Omega} = \int\limits_{\Omega\times\Omega} |x-y|^{-d-rs} |u(x) - u(y)|^r \, dxdy.$$

Обозначим через $\mathcal{W}^{0,r}_0(\Omega)$ подпространство пространства $L^r(\mathbb{R}^d)$ всех функций, которые равны нулю вне Ω, а через $\mathcal{W}^{1,r}_0(\Omega)$ подпространство пространства $W^{1,r}(\mathbb{R}^d)$ функций, равных нулю вне Ω. Дадим определение интерполяционного пространства $\mathcal{W}^{s,r}_0(\Omega)$.

1.2.2. Определение. *Для всех $0 < s < 1$ и $1 < r < \infty$ обозначим через $\mathcal{W}^{s,r}_0(\Omega)$ интерполяционное пространство $[\mathcal{W}^{0,r}_0(\Omega), \mathcal{W}^{1,r}_0(\Omega)]_{s,r}$, наделенное одной из эквивалентных норм (4) или (6) и определенное методом вещественной интерполяции.*

В работах P. Grisward'а и J. Löfström'а доказан следующий результат о совпадении интерполяционного пространства с пространством Соболева: $\mathcal{W}^{s,r}_0(\Omega) = W^{s,r}_0(\Omega)$ при $s \in (0,1)$, $r \in (1, \infty)$, $s \neq 1/r$.

Зададим форму двойственности

$$\langle u, v\rangle = \int\limits_{\Omega} u\, v\, dx$$

для всех функций $u \in L^r$, $v \in L^{r'}$, $r' = r/(r-1)$ таких, что правая часть равенства имеет смысл.

Пусть $s \in [0,1]$, $r \in (1,\infty)$. Определим двойственные пространства $\mathcal{W}^{-s,r'}(\Omega)$, $\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)$, $r' = r/(r-1)$, как пополнение пространства $L^{r'}(\Omega)$ по нормам

$$\|v\|_{\mathcal{W}^{-s,r'}(\Omega)} = \sup_{\substack{u \in \mathcal{W}^{s,r}_0(\Omega)\\ \|u\|_{\mathcal{W}^{s,r}_0(\Omega)}=1}} |\langle u, v\rangle|,$$

$$\|v\|_{\mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)} := \sup_{\substack{u \in W^{s,r}(\Omega)\\ \|u\|_{W^{s,r}(\Omega)}=1}} |\langle u, v\rangle|.$$

Отметим, что если $s \neq 1/r$, тогда $\mathcal{W}^{-s,r'}(\Omega) = W^{-s,r'}(\Omega) = (W^{s,r}_0(\Omega))'$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ - ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^1$, $0 \leq s \leq 1$, $1 < r < \infty$. Введем пространства Банаха

$$X^{s,r} = W^{s,r}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega),\ Y^{s,r} = W^{s+1,r}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega),$$

$$Z^{s,r} = \mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega) \cap L^2(\Omega) \quad \text{с нормами}$$

$$\|u\|_{X^{s,r}} = \|u\|_{W^{s,r}(\Omega)} + \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}, \quad \|u\|_{Y^{s,r}} = \|u\|_{W^{1+s,r}(\Omega)} + \|u\|_{W^{2,2}(\Omega)},$$
$$\|u\|_{Z^{s,r}} = \|u\|_{\mathcal{W}^{s-1,r}(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Через $X^{s,r}_\Pi$ обозначим множество функций пространства $X^{s,r}$, имеющих нулевое среднее значение.

Во второй главе диссертации в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega \in C^\infty$ исследуется краевая задача для уравнения переноса

$$\mathscr{L}\varphi := \mathbf{u} \cdot \nabla\varphi + \sigma\varphi = f \quad \text{в}\ \Omega, \quad \varphi = 0 \quad \text{на}\ \Sigma_{\text{in}}, \tag{7}$$

где $\mathbf{u} \in C^1(\Omega)^3$, $\mathbf{u} = \mathbf{U}$ на $\partial\Omega$, $\mathbf{U} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)^3$, область втекания Σ_{in} определена формулой (1). Предполагается, что Γ и $\mathbf{U}$ удовлетворяют условию возникающего поля.

2.1.3. Условие. Γ - *замкнутое одномерное многообразие класса* C^∞. *Существует константа* $c(\Omega, \mathbf{U})$ *такая, что справедливо неравенство*

$$\mathbf{U} \cdot \nabla(\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}) > c > 0 \quad \textit{на} \quad \Gamma.$$

Поскольку векторное поле $\mathbf{U}$ является касательным к $\partial\Omega$ на Γ, то левая часть предыдущего неравенства определена значениями векторного поля на Γ. Очевидно, что данное условие выполнено для всех строго выпуклых областей и постоянных векторных полей. Условие 2.1.3 имеет следующую геометрическую интерпретацию: величина $\mathbf{U}\cdot\mathbf{n}$ обращается в ноль на Γ только до первого порядка, в любой точке $P \in \Gamma$ вектор $\mathbf{U}(P)$ касается части $\partial\Omega$ где $\mathbf{U}$ - внешнее векторное поле. Впервые *условие возникающего поля* было введено Л. Хёрмандером.

Вторая глава состоит из девяти параграфов. В § 2.1 формулируется теорема 2.1.4, которая является основным результатом главы 2 и обобщает результаты О. А. Олейник и Е. В. Радкевича о разрешимости краевых задач для транспортного уравнения в пространствах Соболева на случай непустого характеристического многообразия Γ.

2.1.4. Теорема. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ - *ограниченная область с границей* $\partial\Omega \in C^\infty$, Γ *и* $\mathbf{U} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)^3$ *удовлетворяют условию 2.1.3,* $\mathbf{u} \in C^1(\Omega)^3$ *и* $\mathbf{u} = \mathbf{U}$ *на* $\partial\Omega$. *Пусть* s *и* r *удовлетворяют условиям*

$$0 < s \le 1, \quad 1 < r < \infty, \quad \kappa =: 2s - 3/r < 1. \tag{8}$$

Тогда существуют положительные константы $\sigma^* > 1$ *и* C, *зависящие от* Ω, $\mathbf{U}$, s, r, $\|\mathbf{u}\|_{C^1(\Omega)}$ *и не зависящие от* σ, *такие, что для любых* $\sigma > \sigma^*$ *и* $f \in W^{s,r}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *существует единственное решение* $\varphi \in W^{s,r}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *задачи* (7) *и выполнены оценки*

$$\|\varphi\|_{W^{s,r}(\Omega)} \le C\sigma^{-1}\|f\|_{W^{s,r}(\Omega)} + C\sigma^{-1+\alpha}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad sr \ne 1, 2,$$

$$\|\varphi\|_{W^{s,r}(\Omega)} \le C\sigma^{-1}\|f\|_{W^{s,r}(\Omega)} + C\sigma^{-1+\alpha}(1+\log\sigma)^{1/r}\|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad sr = 1, 2,$$

где $\alpha(r,s) = \max\{0,\, s - r^{-1},\, 2s - 3r^{-1}\}$.

Поскольку при $sr > 3$ вложения $X^{s,r} \hookrightarrow C(\Omega)$ и $Y^{s,r} \hookrightarrow C^1(\Omega)$ непрерывны и каждое из пространств $X^{s,r}$, $Y^{s,r}$ является коммутативной банаховой алгеброй, то имеет место следующий результат о разрешимости задач (7) и (9) в пространстве $X^{s,r}$.

$$\mathscr{L}^*\varphi^* = -\operatorname{div}(\varphi^*\mathbf{u}) + \sigma\varphi^* = f \quad \text{в} \ \Omega, \quad \varphi^* = 0 \quad \text{на} \ \Sigma_{\text{out}}. \tag{9}$$

2.1.6. Следствие. *Пусть $\Omega = B\backslash S \subset \mathbb{R}^3$ - ограниченная односвязная область, $\partial\Omega \in C^\infty$, Γ и $\mathbf{U} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)^3$ удовлетворяют условию 2.1.3, показатели s, r удовлетворяют неравенствам (8), $sr > 3$, векторное поле $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}$, где $\mathbf{u}_0 \in C^\infty(\Omega)^3$, удовлетворяет краевым условиям $\mathbf{u} = \mathbf{U}$ на Σ, $\mathbf{u} = 0$ на ∂S. Тогда существуют $\tau^* \in (0, 1]$ и $\sigma^* > 1$, зависящие только от Ω, $\mathbf{U}$, $\mathbf{u}_0$ и s, r, такие, что для всех $\sigma > \sigma^*$, $f \in X^{s,r}$ и $\mathbf{v}$ таких, что $\|\mathbf{v}\|_{Y^{s,r}} \le \tau^*$, у каждой из задач (7) и (9) существует единственное решение, принадлежащее пространству $X^{s,r}$ и удовлетворяющее оценкам*

$$\|\varphi\|_{X^{s,r}} \le C\|f\|_{X^{s,r}}, \quad \|\varphi^*\|_{X^{s,r}} \le C\|f\|_{X^{s,r}},$$

где константа C зависит только от $\|\mathbf{u}\|_{Y^{s,r}}$, r, s, σ, $\mathbf{U}$ и Ω.

В § 2.2 - 2.9 представлено доказательство теоремы 2.1.4. В доказательстве применяются полученные О. А. Олейник и Е. В. Радкевичем результаты о разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой.

В третьей главе диссертации исследуется разрешимость задачи (2), а также анализируется чувствительность решения задачи (2) к изменению формы области течения. Глава 3 состоит из десяти параграфов. В § 3.1 в пространстве $\mathbb{R}^3$ с помощью отображения $x \to y(x) = x + \varepsilon\mathbf{T}(x)$, где $\mathbf{T} \in C^2(\mathbb{R}^3)^3$, $\mathbf{T} = 0$ на Σ, задается возмущение формы обтекаемого тела S. Для малого числа $\varepsilon > 0$ отображение $x \to y$ диффеоморфно переводит область течения Ω на $\Omega_\varepsilon = B \setminus S_\varepsilon$, где $S_\varepsilon = y(S)$ - возмущенное препятствие. Обозначим через $(\bar{\mathbf{u}}_\varepsilon(y), \bar{\varrho}_\varepsilon(y))$ - решение задачи (2) в возмущенной области Ω_ε, а через $\mathbf{J}(S_\varepsilon)$ - силу, действующую со стороны течения на возмущенное препятствие S_ε.

Рассмотрим присоединенную матрицу $\mathbf{N}$ матрицы Якоби $(\mathbf{I} + \varepsilon\mathbf{T}')$

$$\mathbf{N}(x) = \det\,(\mathbf{I} + \varepsilon\mathbf{T}'(x))(\mathbf{I} + \varepsilon\mathbf{T}'(x))^{-1}, \text{ положим } \mathfrak{g}(x) = \sqrt{\det\,\mathbf{N}}.$$

Матрица $\mathbf{N}(x)$ аналитически зависит от малого параметра ε и имеет представление

$$\mathbf{N} = \mathbf{I} + \varepsilon\mathbf{D}(x) + \varepsilon^2\mathbf{D}_1(\varepsilon, x), \text{ где } \mathbf{D} = \operatorname{div}(\mathbf{T})\mathbf{I} - \mathbf{T}'. \tag{10}$$

Задавая в невозмущенной области Ω функции

$$\mathbf{u}_\varepsilon(x) = \mathbf{N}\bar{\mathbf{u}}_\varepsilon(x + \varepsilon\mathbf{T}(x)), \quad \varrho_\varepsilon(x) = \bar{\varrho}_\varepsilon(x + \varepsilon\mathbf{T}(x)),$$

можно свести краевую задачу (2) с неизвестными функциями $\bar{\mathbf{u}}_\varepsilon$, $\bar{\varrho}_\varepsilon$, заданными в области Ω_ε, к краевой задаче с неизвестными функциями $\mathbf{u}_\varepsilon$, ϱ_ε, заданными в области Ω. Вводя *эффективное вязкое давление*

$$q_\varepsilon = Rp(\varrho_\varepsilon)/\epsilon^2 - \lambda\mathfrak{g}^{-1}\operatorname{div}\mathbf{u}_\varepsilon$$

и опуская у функций $\mathbf{u}_\varepsilon$, q_ε, ϱ_ε индекс ε, получим следующую краевую задачу с неизвестными функциями $(\mathbf{u}, q, \varrho)$:

$$\Delta\mathbf{u} - \nabla q = \mathscr{A}(\mathbf{u}) + R\mathscr{B}(\varrho, \mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{11a}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \mathfrak{g}\sigma_0 p(\varrho) - \frac{\mathfrak{g}q}{\lambda} \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{11b}$$

$$\mathbf{u}\cdot\nabla\varrho + \mathfrak{g}\sigma_0 p(\varrho)\,\varrho = \frac{\mathfrak{g}q}{\lambda}\varrho \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{11c}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} \quad \text{на} \quad \Sigma, \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{на} \quad \partial S, \tag{11d}$$

$$\varrho = \varrho_0 \quad \text{на} \quad \Sigma_{\text{in}}, \quad \sigma_0 = R/(\lambda\epsilon^2). \tag{11e}$$

Здесь $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ зависят от $\mathbf{N}$ и определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(\mathbf{u}) &= \Delta\mathbf{u} - (\mathbf{N}^*)^{-1}\operatorname{div}\big(\mathfrak{g}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{N}^*\nabla(\mathbf{N}^{-1}\mathbf{u})\big), \\ \mathscr{B}(\varrho, \mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \varrho(\mathbf{N}^*)^{-1}\Big(\mathbf{u}\cdot\nabla\big(\mathbf{N}^{-1}\mathbf{w}\big)\Big). \end{aligned} \tag{12}$$

В новых переменных выражения для силы $\mathbf{J}(S_\varepsilon)$ и функционала сопротивления $J_D(S_\varepsilon)$ перепишутся в виде

$$\mathbf{J}(S_\varepsilon) = -\int\limits_\Omega \big[\mathfrak{g}^{-1}\big(\mathbf{N}^*\nabla(\mathbf{N}^{-1}\mathbf{u}) + \nabla(\mathbf{N}^{-1}\mathbf{u})^*\mathbf{N} - (\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{I}\big) \tag{13}$$
$$-q\mathbf{I} - R\varrho(\mathbf{N}^{-1}\mathbf{u})\otimes(\mathbf{N}^{-1}\mathbf{u})\big]\mathbf{N}^*\nabla\eta\,dx,$$

$$J_D(S_\varepsilon) = \mathbf{U}_\infty\cdot\mathbf{J}(S_\varepsilon), \tag{14}$$

где $\eta \in C^\infty(\Omega)$ - произвольная функция, $\eta = 1$ на ∂S, $\eta = 0$ на Σ.

Всюду в работе мы предполагаем, что $\lambda \gg 1$, $\epsilon \ll 1$ и $R \ll 1$, что соответствует почти несжимаемому течению с малыми числами Маха и Рейнольдса. В данном случае *приближенные решения* задачи (11) могут быть выбраны в виде $(\varrho_0, \mathbf{u}_0, q_0)$, где ϱ_0 - константа в краевых условиях (11e), а $(\mathbf{u}_0, q_0)$ - решение краевой задачи для уравнений Стокса

$$\Delta\mathbf{u}_0 - \nabla q_0 = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}_0 = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{15}$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{U} \quad \text{на} \quad \Sigma, \quad \mathbf{u}_0 = 0 \quad \text{на} \quad \partial S, \quad \Pi q_0 := q_0 - \frac{1}{\operatorname{meas}\Omega}\int\limits_\Omega q_0\,dx = q_0.$$

Будем искать решения задачи (11) в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}, \quad \varrho = \varrho_0 + \varphi, \quad q = q_0 + \lambda\sigma_0 p(\varrho_0) + \pi + \lambda m, \tag{16}$$

с неизвестными функциями $\vartheta = (\mathbf{v}, \pi, \varphi)$ и неизвестной константой m. Подставляя (16) в (11), получим следующую краевую задачу для ϑ:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{v} - \nabla\pi &= \mathscr{A}(\mathbf{u}) + R\mathscr{B}(\varrho, \mathbf{u}, \mathbf{u}) \ \text{ в } \ \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{v} &= \mathfrak{g}\Big(\frac{\sigma}{\varrho_0}\varphi - \Psi[\vartheta] - m\Big) \ \text{ в } \ \Omega, \\ \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi + \sigma\varphi &= \Psi_1[\vartheta] + m\mathfrak{g}\varrho \ \text{ в } \ \Omega, \\ \mathbf{v} = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \quad \varphi &= 0 \ \text{ на } \ \Sigma_{\text{in}}, \quad \Pi\pi = \pi, \end{aligned} \tag{17a}$$

где

$$\Psi_1[\vartheta] = \mathfrak{g}\Big(\varrho\Psi[\vartheta] - \frac{\sigma}{\varrho_0}\varphi^2\Big) + \sigma\varphi(1-\mathfrak{g}),\ \Psi[\vartheta] = \frac{q_0+\pi}{\lambda} - \frac{\sigma}{p'(\varrho_0)\varrho_0}H(\varphi),$$
$$\sigma = \sigma_0 p'(\varrho_0)\varrho_0, \quad H(\varphi) = p(\varrho_0+\varphi) - p(\varrho_0) - p\prime(\varrho_0)\varphi, \tag{17b}$$

$\mathbf{u}$ и ϱ заданы формулами (16). Определяющие константу m условия совместности формулируются специальным образом, чтобы была возможность контролировать общую массу газа. Для этого выписывается вспомогательная краевая задача для сопряженного уравнения с неизвестной функцией ζ

$$-\operatorname{div}(\mathbf{u}\zeta) + \sigma\zeta = \sigma\mathfrak{g} \ \text{ в } \ \Omega, \quad \zeta = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_{\text{out}}, \tag{17c}$$

а константа m задается формулой

$$m = \varkappa\int\limits_{\Omega}(\varrho_0^{-1}\Psi_1[\vartheta]\zeta - \mathfrak{g}\Psi[\vartheta])\,dx, \quad \varkappa = \Big(\int\limits_{\Omega}\mathfrak{g}(1-\zeta-\varrho_0^{-1}\zeta\varphi)\,dx\Big)^{-1}. \tag{17d}$$

Таким образом, вспомогательная функция ζ становится частью решения задачи (17).

Обозначим через E замкнутое подпространство пространства Банаха $(Y^{s,r})^3 \times (X^{s,r})^2$, определенное следующим образом:

$$E = \{\vartheta = (\mathbf{v}, \pi, \varphi) \ : \ \mathbf{v} = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \quad \varphi = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_{\text{in}}, \quad \Pi\pi = \pi\},$$

а через $\mathcal{B}_\tau \subset E$ - замкнутый шар радиуса τ с центром в 0. Норма элемента ϑ в пространстве E задана равенством $\|\vartheta\|_E = \|\mathbf{v}\|_{Y^{s,r}} + \|\pi\|_{X^{s,r}} +$

$\|\varphi\|_{X^{s,r}}$. Главным результатом главы 3 является теорема 3.1.1, которая обобщает результаты M. Padula, A. Novotny, I. Stravskraba о разрешимости однородных краевых задач для стационарных уравнений Навье-Стокса динамики вязкого газа, а также результаты J. R. Kweon'а и R. B. Kellogg'а о разрешимости неоднородных краевых задач для данных уравнений на случай, когда скорость на границе области задается равной произвольной гладкой функции.

3.1.1. Теорема. *Пусть* $\Omega = B\backslash S \subset \mathbb{R}^3$ *- ограниченная область,* $\partial\Omega \in C^\infty$, Γ *и* $\mathbf{U} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)^3$ *удовлетворяют условию 2.1.3,* r, s *удовлетворяют неравенствам*

$$1/2 < s < 1, \quad 1 < r < 3/(2s-1), \quad sr > 3. \tag{18}$$

Тогда существует $\sigma^* > 1$, *зависящее только от* $\mathbf{U}$, Ω, r, s, $\mathbf{u}_0$, *такое, что для всех* $\sigma > \sigma^*$ *можно выбрать* $\tau_0 > 0$, *зависящее от* $\mathbf{U}$, Ω, r, s, ϱ_0, $\mathbf{u}_0$, q_0, σ, *таким образом, что при*

$$\tau \in (0, \tau_0], \quad \lambda^{-1}, R \in (0, \tau^2], \quad \|\mathbf{N} - \mathbf{I}\|_{C^2(\Omega)} \leq \tau^2,$$

существует единственное решение $(\vartheta, \zeta, m) \in B_\tau \times X^{s,r} \times \mathbb{R}$ *задачи* (17). *Более того, функция* ζ *и константы* $\varkappa$, m *допускают оценки*

$$\|\zeta\|_{X^{s,r}} + |\varkappa| \leq c, \quad |m| \leq c\tau < 1,$$

где константа c *зависит только от* $\mathbf{U}$, Ω, r, s, σ, ϱ_0 *и* $\mathbf{u}_0$, q_0.

3.1.2. Замечание. *Ввиду неравенств* (18), *показатели* s, r, *заданные в теореме 3.1.1, удовлетворяют условию* $s \neq 1/r$.

Отметим, что, поскольку при $sr > 3$ вложения $X^{s,r} \hookrightarrow C(\Omega)$ и $Y^{s,r} \hookrightarrow C^1(\Omega)$ непрерывны, то из теоремы 3.1.1 следует существование и единственность сильного решения задачи (17). Доказательство теоремы 3.1.1 представлено в § 3.2 - 3.7. В § 3.8 - 3.10 выводятся уравнения (11), (17) и формула (13).

В четвертой главе доказывается дифференцируемость по области решений задачи (17) и вычисляется формула для производной по области функционала сопротивления (14). Глава 4 состоит из шести параграфов. В § 4.1. задаются конечно-разностные отношения $\mathbf{w}_\varepsilon$, ω_ε, ψ_ε, ξ_ε, n_ε по следующим формулам:

$$(\mathbf{w}_\varepsilon, \omega_\varepsilon, \psi_\varepsilon) = \varepsilon^{-1}(\vartheta(\varepsilon) - \vartheta), \ \xi_\varepsilon = \varepsilon^{-1}(\zeta(\varepsilon) - \zeta), \ n_\varepsilon = \varepsilon^{-1}(m(\varepsilon) - m), \tag{19}$$

где $\vartheta(\varepsilon)$, $\zeta(\varepsilon)$, $m(\varepsilon)$ и ϑ, ζ, m - решения задачи (17) с матрицей $\mathbf{N}(\varepsilon)$ и $\mathbf{N}(0) = \mathbf{I}$ соответственно.

Производные по области решений краевой задачи (17) определяются следующим образом:

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\mathbf{v}(\varepsilon), \pi(\varepsilon), \varphi(\varepsilon), \zeta(\varepsilon), m(\varepsilon))\Big|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\big(\mathbf{w}_\varepsilon, \omega_\varepsilon, \psi_\varepsilon, \xi_\varepsilon, n_\varepsilon\big).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим, что $(\mathbf{w}, \omega, \psi, \xi, n) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\mathbf{w}_\varepsilon, \omega_\varepsilon, \psi_\varepsilon, \xi_\varepsilon, n_\varepsilon)$ является решением линеаризованной задачи

$$\begin{aligned}
\Delta\mathbf{w} - \nabla\omega = R\psi\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + R\varrho\mathbf{w}\cdot\nabla\mathbf{u} + R\varrho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{w} + \mathscr{D}_0(\mathbf{D}) \ \text{ в } \ \Omega,\\
\operatorname{div}\mathbf{w} = b^0_{21}\,\psi + b^0_{22}\,\omega + b^0_{23}\,n + b^0_{20}\,\mathfrak{d} \ \text{ в } \ \Omega,\\
\mathscr{L}\psi := \mathbf{u}\cdot\nabla\psi + \sigma\psi = -\mathbf{w}\cdot\nabla\varphi + b^0_{11}\,\psi + b^0_{12}\,\omega + b^0_{13}\,n + b^0_{10}\,\mathfrak{d} \ \text{ в } \ \Omega,\\
\mathscr{L}^*\xi := -\operatorname{div}(\mathbf{u}\xi) + \sigma\xi = \operatorname{div}(\zeta\mathbf{w}) + \sigma\mathfrak{d} \ \text{ в } \ \Omega,\\
\mathbf{w} = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \quad \psi = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_{\text{in}}, \qquad \xi = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_{\text{out}},\\
\omega - \Pi\omega = 0, \quad n = \varkappa\int\limits_\Omega \Big(b^0_{31}\,\psi + b^0_{32}\,\omega + b^0_{34}\,\xi + b^0_{30}\,\mathfrak{d}\big)\,dx,
\end{aligned} \tag{20}$$

где $\mathfrak{d} = 1/2\,\mathrm{Tr}\,\mathbf{D}$, коэффициенты $b^0_{ij} = b^0_{ij}(\vartheta, \zeta, m, \varrho_0)$, где ϑ, ζ, m - решение задачи (17), соответствующее матрице $\mathbf{N}(0) = \mathbf{I}$,

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_0(\mathbf{D}) = -R\varrho\mathbf{u}\cdot\nabla(\mathbf{D}\mathbf{u}) - R\varrho\mathbf{D}^*(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}) - \\
\operatorname{div}\big((\mathbf{D}+\mathbf{D}^*)\nabla\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ \mathbf{D}\nabla\mathbf{u}\big) + \mathbf{D}^*\Delta\mathbf{u} + \Delta(\mathbf{D}\mathbf{u}).
\end{aligned} \tag{21}$$

Гладкости решения задачи (17) не достаточно для того, чтобы задача (20) была корректна в слабой постановке, поэтому дается определение *очень слабого решения* задачи (20).

4.1.1. Определение. *Векторное поле* $\mathbf{w} \in \mathcal{W}^{1-s,r'}_0(\Omega)^3$*, функционалы* $(\omega, \psi, \xi) \in \mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega)^3$ *и число* $n \in \mathbb{R}$ *называются очень слабым решением задачи* (20)*, если* $\langle\omega, 1\rangle = 0$ *и тождество*

$$\begin{gathered}
\int_\Omega \mathbf{w}\Big(\mathbf{H} - R\varrho\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{h} + R\varrho\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{h}\Big)\,dx + \int_\Omega \varsigma\mathbf{w}\cdot\nabla\varphi\,dx + \int_\Omega \zeta\mathbf{w}\cdot\nabla\upsilon\,dx + \\
\big\langle\omega, G - b^0_{12}\varsigma - b^0_{22}g - \varkappa b^0_{32}\big\rangle + \big\langle\psi, F - b^0_{11}\varsigma - b^0_{21}g - \varkappa b^0_{31} - R\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{h}\big\rangle + \\
\big\langle\xi, M - \varkappa b^0_{34}\big\rangle + n\big(1 - \big\langle 1, b^0_{13}\varsigma\big\rangle\big) = \\
\big\langle\mathfrak{d}, b^0_{10}\varsigma + b^0_{20}g + \varkappa b^0_{30} + \sigma\upsilon\big\rangle + \big\langle\mathscr{D}_0, \mathbf{h}\big\rangle
\end{gathered}$$

справедливо для всех $(\mathbf{H}, G, F, M) \in (C^\infty(\Omega))^6$ *таких, что* $G = \Pi G$. *Здесь* $\mathfrak{d} = 1/2 \ Tr\, \mathbf{D}$, *пробные функции* $\mathbf{h}$, g, ς, υ *являются решениями сопряженных задач*

$$\Delta \mathbf{h} - \nabla g = \mathbf{H}, \quad \operatorname{div} \mathbf{h} = G, \quad \mathscr{L}^* \varsigma = F, \quad \mathscr{L} \upsilon = M \ \text{ в } \ \Omega,$$
$$\mathbf{h} = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \quad \Pi g = g, \quad \varsigma = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_{\text{out}}, \quad \upsilon = 0 \ \text{ на } \ \Sigma_{\text{in}}.$$

Понятие очень слабого решения (very weak solution) для задачи Стокса впервые было введено Y. Giga, впоследствии оно применялось при решении краевых задач для уравнений Стокса и Навье-Стокса G. P. Galdi, C. G. Simader'ом, H. Sohr'ом, H. Kim'ом и другими. Основным результатом главы 4 является следующая теорема, которая обобщает результаты J. Simon'а о дифференцируемости по области решений краевой задачи для стационарных уравнений Навье-Стокса динамики вязкого несжимаемого газа на случай сжимаемого газа.

4.1.2. Теорема. *В условиях теоремы 3.1.1 при* $\varepsilon \to 0$ *имеет место сходимость конечно-разностных отношений* (19) *к очень слабому решению* $\mathbf{w}$, ψ, ω, ξ, n *задачи* (20)

$$\mathbf{w}_\varepsilon \to \mathbf{w} \ \ \textit{слабо в} \ \ \mathcal{W}_0^{1-s,r'}(\Omega), \quad n_\varepsilon \to n \ \text{ в } \ \mathbb{R},$$
$$(\psi_\varepsilon, \omega_\varepsilon, \xi_\varepsilon) \to (\psi, \omega, \xi) \ (*)\textit{-слабо в} \ \ \mathbb{W}^{-s,r'}(\Omega).$$

Пусть неподвижное тело S обтекается потоком газа, скорость которого на внешней границе Σ области течения $\Omega = B \setminus S$ равна постоянному вектору $\mathbf{U}_\infty$. Тогда из теоремы 4.1.2 следует существование производной по области функционала сопротивления, определяемой формулой

$$\frac{d}{d\varepsilon} J_D(S_\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \big(\varepsilon^{-1}(J_D(S_\varepsilon) - J_D(S))\big).$$

4.1.3. Теорема. *В условиях теоремы 4.1.2 существует производная по области функционала сопротивления* J_D, *заданного формулой* (14),

$$\frac{d}{d\varepsilon} J_D(S_\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = L_e(\mathbf{T}) + L_u(\mathbf{w}, \omega, \psi), \quad \textit{где} \tag{22}$$

$$L_e(\mathbf{T}) = \int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{T}(\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^* - \operatorname{div}\mathbf{u}\mathbf{I})\nabla\eta\cdot\mathbf{U}_\infty\,dx -$$
$$\int_\Omega \big[\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^* - (\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{I} - q\mathbf{I}\big]\mathbf{D}^*\nabla\eta\cdot\mathbf{U}_\infty\,dx -$$
$$\int_\Omega \big[\mathbf{D}^*\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^*\mathbf{D} - \nabla(\mathbf{D}\mathbf{u}) - \nabla(\mathbf{D}\mathbf{u})^*\big]\nabla\eta\cdot\mathbf{U}_\infty\,dx +$$
$$R\mathbf{U}_\infty\int_\Omega \varrho\mathbf{u}\cdot\nabla(\mathbf{D}\mathbf{u})\eta\,dx,$$
$$L_u(\mathbf{w},\omega,\psi) = \int_\Omega \mathbf{w}\big[\Delta\eta\mathbf{U}_\infty - R\varrho\eta\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{U}_\infty) + R\varrho(\mathbf{u}\cdot\nabla\eta)\mathbf{U}_\infty\big]\,dx +$$
$$\big\langle\omega,\nabla\eta\cdot\mathbf{U}_\infty\big\rangle - R\big\langle\psi,\eta(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{U}_\infty\big\rangle.$$

Таким образом, L_e явно зависит от векторного поля $\mathbf{T}$, а линейная форма L_u зависит от очень слабого решения $(\mathbf{w},\psi,\omega)$ задачи (20), то есть неявным образом зависит от *возмущения* $\mathbf{T}$, что не удобно для приложений. Для того, чтобы преодолеть эту трудность, вводится *сопряженное состояние* $\mathbf{Y} = (\mathbf{h}, g, \varsigma, \upsilon, l)^\top$, заданное как решение краевой задачи для уравнений $\mathbf{\Psi}\mathbf{Y} = \Theta$, которая является сопряженной к задаче (20). Действие оператора $\mathbf{\Psi}$ на $\mathbf{Y}$ и вектор правых частей Θ заданы формулами (23a)-(23e) и (23g) соответственно.

$$\Delta\mathbf{h} - \nabla g - R\varrho\,\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{h} + R\varrho\mathbf{u}\cdot\nabla\,\mathbf{h} + \varsigma\nabla\varphi + \zeta\nabla\upsilon = \Theta_1 \ \text{ в } \ \Omega, \tag{23a}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{h} - \Pi(b^0_{12}\varsigma + b^0_{22}g + \varkappa b^0_{32}l) = \Theta_2 \text{ в } \Omega, \tag{23b}$$

$$-\operatorname{div}(\mathbf{u}\varsigma) + \sigma\varsigma - R(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{h} - b^0_{21}g - b^0_{11}\varsigma - \varkappa b^0_{31}l = \Theta_3 \ \text{ в } \ \Omega, \tag{23c}$$

$$\mathbf{u}\cdot\nabla\upsilon + \sigma\upsilon - \varkappa b^0_{34}l = \Theta_4 \ \text{ в } \ \Omega, \tag{23d}$$

$$l - \langle b^0_{13},\varsigma\rangle = \Theta_5 \ \text{ в } \ \Omega, \tag{23e}$$

$$\mathbf{h} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \ \ \Pi g = g, \ \ \varsigma = 0 \text{ на } \Sigma_{\text{out}}, \ \ \upsilon = 0 \text{ на } \ \Sigma_{\text{in}}, \tag{23f}$$

$$\begin{aligned}\Theta = (&\Delta\eta\mathbf{U}_\infty - R\varrho\eta\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{U}_\infty + R\varrho(\mathbf{u}\cdot\nabla\eta)\mathbf{U}_\infty,\\ &\Pi(\nabla\eta\cdot\mathbf{U}_\infty), -R\eta(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{U}_\infty, 0, 0).\end{aligned} \tag{23g}$$

В теореме 4.1.4 устанавливается существование сопряженного состояния и выводится выражение для производной по области функционала сопротивления, явным образом зависящее от возмущения $\mathbf{T}$.

4.1.4. Теорема. *В условиях теоремы 3.1.1 существует константа* $\tau_1 > 0$ *(зависящая только от* $\mathbf{U}_\infty$, Ω *и* r, s*) такая, что, если* $\tau \in (0, \tau_1]$ *и* R, $\lambda^{-1} \leq \tau^2$, *то для любой* $\Theta \in (Z^{s,r})^3 \times X_\Pi^{s,r} \times (X^{s,r})^2 \times \mathbb{R}$ *существует единственное решение* $\mathbf{Y} \in (Y^{s,r})^3 \times (X^{s,r})^3 \times \mathbb{R}$ *задачи* (23). *Кроме того, линейная форма* L_u *может быть представлена в виде*

$$L_u(\mathbf{w}, \psi, \omega) = \int_\Omega \big[\operatorname{div} \mathbf{T}\big(b_{10}^0 \varsigma + b_{20}^0 g + \sigma \upsilon + \varkappa b_{30}^0 l\big) + \mathscr{D}_0(\mathbf{D})\mathbf{h}\big]\, dx, \quad (24)$$

где b_{ij}^0 *- коэффициенты в задаче* (20), $\mathscr{D}_0$ *задан формулой* (21).

Доказательство теорем 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4 приведено в § 4.2, 4.3, 4.5. Вывод уравнений в краевых задачах (23), (20) представлен в § 4.4, 4.6.

В пятой главе диссертации формула (22) преобразуется таким образом, чтобы новое выражение для производной функционала зависело только от нормальных значений возмущения $\mathbf{T}$, заданных на поверхности ∂S, и не зависело от функции η. Глава 5 состоит из пяти параграфов. В § 5.1 возмущение поверхности ∂S задается формулой

$$\partial S_\varepsilon = \{x = \omega + \varepsilon f(\omega)\mathbf{n}(\omega), \quad \omega \in \partial S\}, \quad (25)$$

где нормальный сдвиг $f \in C^\infty(\partial S)$, а $\mathbf{n}$ - вектор внешней единичной нормали к ∂S в точке ω. Теорема 5.1.1, доказательство которой приведено в § 5.2 - 5.5, является главным результатом главы 5.

5.1.1. Теорема. *Пусть возмущенная поверхность* ∂S_ε *задана формулой* (25), $f \in C^\infty(\partial S)$, *тогда в условиях теоремы 3.1.1 формула* (22) *может быть преобразована следующим образом:*

$$\frac{d}{d\varepsilon} J_D(S_\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_{\partial S} f(\omega)\big[b_{10}^0 \varsigma + b_{20}^0 g + \sigma \upsilon + l\varkappa b_{30}^0 - (\partial_n \mathbf{h} \cdot \partial_n \mathbf{u})\big]\, dS, \quad (26)$$

где b_{ij}^0 *- коэффициенты в задаче* (20), *функции* $(\mathbf{h}, g, \varsigma, \upsilon) \in (Y^{s,r})^3 \times X_\Pi^{s,r} \times (X^{s,r})^2$ *и число* $l \in \mathbb{R}$ *являются решением краевой задачи для уравнений сопряженного состояния*

$$\mathbf{\Psi Y} = 0 \qquad \text{в} \;\; \Omega, \quad (27)$$

$$\mathbf{h} = 0 \;\; \text{на} \;\; \Sigma, \;\; \mathbf{h} = -\mathbf{U}_\infty \;\; \text{на} \;\; \partial S, \;\; \varsigma = 0 \;\text{на}\; \Sigma_{\text{out}}, \;\; \upsilon = 0 \;\text{на}\; \Sigma_{\text{in}},$$

где действие $\mathbf{\Psi}$ *на* $\mathbf{Y} = (\mathbf{h}, g, \varsigma, \upsilon, l)^\top$ *задано формулами* (23a)-(23e).

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю чл.-корр. РАН Плотникову П. И. за постановку задачи, постоянное внимание к работе и ценные советы.

Работы автора по теме диссертации

1. *Рубан Е.В.* Дифференцируемость по области решений уравнений Навье-Стокса. Материалы XLII Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2004.

2. *Рубан Е.В.* Дифференцируемость по области решений уравнений Навье-Стокса. Тезисы Всероссийской конференции "Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа (САМГОП)". Абрау-Дюрсо, 2004, С. 62.

3. *Рубан Е.В.* Дифференцируемость по области решений уравнений Навье-Стокса. Тезисы Всероссийской конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и механики (АФСИД)". Абрау-Дюрсо, 2004, С. 88.

4. *Рубан Е.В.* Производная функционала сопротивления по области. Материалы XLIII Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2005, С. 47.

5. *Plotnikov P.I., Ruban E.V., Sokolowski J.* Inhomogeneous boundary value problems for compressible Navier-Stokes equations, well-posedness and sensitivity analysis // SIAM J. Math. Analysis **40**, 2008, P. 1152-1200.

6. *Plotnikov P.I., Ruban E.V., Sokolowski J.* Inhomogeneous boundary value problems for compressible Navier-Stokes and transport equations // Journal des Mathématiques Pure et Appliquées, electronic, vol. 92, № 2, 2009, P. 113-162.

7. *Plotnikov P.I., Ruban E.V., Sokolowski J.* Shape Sensitivity Analysis for Compressible Navier-Stokes Equations. System Modelling and Optimization, 23rd IFIP TC 7 Conf., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009, P. 430-447.

Подписано к печати 24.01.2011. Формат 60×84 1/16.
Объем 1.0 п.л.
Тираж 75 экз. Заказ № 65

Отпечатано в ИГиЛ СО РАН
630090, Новосибирск, проспект академика Лаврентьева, 15.