На правах рукописи

Прокудин Дмитрий Алексеевич

АНАЛИЗ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕСЕЙ ЖИДКОСТЕЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Кемерово 2010

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Н. А. Кучер

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
доцент А. Е. Мамонтов

кандидат физико-математических наук,
доцент А. А. Папин

Ведущая организация: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Защита состоится « 27 » апреля 2010 года в 10 часов на заседании диссертационного совета Д 212.174.02 при ГОУ ВПО «Новосибирский государственный университет» по адресу: 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГОУ ВПО «Новосибирский государственный университет».

Автореферат разослан « 24 » марта 2010 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Н. И. Макаренко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Кроме классических уравнений гидродинамики при решении многих современных задач механики сплошных сред используются более сложные модели, точнее учитывающие неоднородный характер состава реальных жидкостей и газов. Одним из примеров таких моделей служит модель двухкомпонентных смесей сжимаемых жидкостей. Эта модель в изотермическом случае (без уравнения энергии) описывается системой дифференциальных уравнений, отражающих закон сохранения массы и закон сохранения импульса для каждой компоненты смеси

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + div(\rho_i \vec{u}^{(i)}) = 0, \quad i = 1,2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho_i \vec{u}^{(i)})}{\partial t} + div(\rho_i \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}) = div P^{(i)} + \rho_i \vec{f}^{(i)} + \vec{J}^{(i)}, \quad i = 1,2, \tag{2}$$

где ρ_i и $\vec{u}^{(i)}$ соответственно плотность и вектор скорости i-ой составляющей смеси, $P^{(i)}$ – тензор напряжений, $\vec{f}^{(i)}$ – вектор массовых сил i-ой компоненты смеси, $\vec{J}^{(i)}$ – интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси. Как видно, закон сохранения импульса формулируется для каждой составляющей смеси и связь между этими уравнениями обусловлена структурой выражений

$$P^{(i)} = -p_i I + \sigma^{(i)}, \quad \sigma^{(i)} = \sum_{j=1}^{2} \left(2\mu_{ij} D(\vec{u}^{(j)}) + \lambda_{ij} div\, \vec{u}^{(j)} I \right), \; i = 1,2$$

и

$$\vec{J}^{(i)} = (-1)^{i+1} a \left(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)} \right), \; i = 1,2,$$

где p_i – давление i-ой компоненты смеси, $\sigma^{(i)}$ – вязкая часть тензора напряжений i-ой составляющей, D – тензор скоростей деформаций $\left(D(\vec{w}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial x} \right)^* \right) \right)$, I – единичный тензор, λ_{ij} и μ_{ij} – коэффициенты вязкости, $a = const > 0$. Данная модель является общепринятой и широко используется в приложениях (см., например, монографию С. Н. Антонцева, А. В. Кажихова и В. Н. Монахова Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. М.: Наука, 1983).

Актуальность исследований уравнений механики сплошных сред и, в частности, моделей смесей вязких жидкостей обусловлена многочисленными приложениями и стимулируется потребностями развития индустриальных технологий. Исследования корректности задач, относящихся к проблемам движения смесей вязких жидкостей, способствуют разработке вычислительных методов для их решения, значение чего в последнее время чрезвычайно возросло.

Описанная выше многоскоростная модель смеси является обобщением классической модели Навье-Стокса и, естественно, немногочисленные работы о корректности многомерных моделей смесей сжимаемых жидкостей появились после определенного прогресса, достигнутого для уравнений Навье-Стокса. Начало нелокальной теории двух- и трехмерных уравнений динамики вязкого газа было положено П.-Л. Лионсом в 1993 г. Им была установлена слабая регулярность эффективного вязкого потока и доказана глобальная разрешимость основных краевых задач для уравнений Навье-Стокса сжимаемого баротропного газа для достаточно больших показателей адиабаты. Дальнейшее существенное продвижение в теории было проведено Э. Файрайзелом (2001), который показал, что слабая регулярность эффективного вязкого потока является следствием принципа компенсированной компактности и это позволило доказать разрешимость нестационарных краевых задач для показателей адиабаты из интервала $\left(\frac{3}{2},\infty\right)$. П. И. Плотниковым и Ж. Соколовски предложен подход к анализу уравнений Навье-Стокса, позволивший доказать существование ренормализованных решений стационарных уравнений динамики вязкого газа для показателя адиабаты из интервала $\left(\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right]$ и тем самым охватить важный случай двухатомных газов.

Сформулированная выше модель смеси имеет ряд особенностей, первая из которых – это отсутствие закона диссипации энергии в случае общей зависимости давления от плотностей составляющих смеси. По этой причине, нелокальные результаты для многомерных моделей смесей вязких сжимаемых жидкостей на сегодняшний день получены только для системы Стокса без конвективных членов, т. е. рассматривалась система уравнений вида

$$div(\rho_i \vec{u}^{(i)}) = 0, \quad i = 1,2, \tag{3}$$

$$-divP^{(i)} = \rho_i \vec{f}^{(i)} + \vec{J}^{(i)}, \quad i = 1,2. \tag{4}$$

Одной из первых работ в этом направлении является работа Ж. Фрезе, С. Гой и Ж. Малека, в которой доказана разрешимость задачи Коши в R^3 для уравнений (3)-(4). Ими также был получен результат о единственности слабых решений задачи Коши при дополнительном предположении, что массовые силы и члены, учитывающие обмен импульсом между различными компонентами смеси, равны нулю. Ж. Фрезе и В. Вайгант (2004) рассматривали краевую задачу для квази-стационарной системы уравнений смеси в ограниченной области пространства R^3

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + div(\rho_i \vec{u}^{(i)}) = 0, \quad i = 1,2, \tag{5}$$

$$-divP^{(i)} = \vec{J}^{(i)}, \quad i = 1,2, \tag{6}$$

но со специальными граничными условиями

$$\vec{u}^{(i)} \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{n} \times rot\, \vec{u}^{(i)} = 0, \quad i = 1,2, \tag{7}$$

оправданными только с математической точки зрения.

Трудность, связанная с отсутствием закона диссипации энергии, исчезает, если дополнительно предположить, что давление p_i в каждой из компонент смеси зависит только от соответствующей плотности ρ_i, т.е. $p_i = p_i(\rho_i)$. При этом предположении одномерные задачи были изучены в работах А. В. Кажихова, А. Н. Петрова, А. А. Злотника и А. А. Папина.

С другой стороны, развитая в настоящее время теория обобщенных решений многомерных уравнений Навье-Стокса динамики вязких газов позволяет обобщить полученные результаты на случай смесей только тогда, когда вязкая часть тензора напряжений i-ой составляющей смеси удовлетворяет тождеству

$$div^2 \sigma^{(i)} = const_i\, \Delta div \vec{u}^{(i)}, \quad i = 1,2, \tag{8}$$

т. е. когда $\lambda_{ij} + 2\mu_{ij} = 0, \quad i \neq j$. Однако для сложных сред (см. определение $\sigma^{(i)}$ выше) это тождество вообще говоря не выполняется.

В данной работе рассматриваются некотрые краевые задачи для стационарных уравнений динамики смесей вязких сжимаемых жидкостей в случае трех пространственных переменных. Трудность, связанная с обобщением результатов теории многомерных уравнений Навье-Стокса на случай смесей преодолевается благодаря дополнительным аргументам, основанным на методе монотонности и теории компенсированной компактности.

Цель работы. Основной целью диссертации является теоретический анализ глобальной разрешимости краевых задач для многомерных уравнений движения смесей вязких сжимаемых жидкостей в стационарном случае.

Методы исследования. В диссертации используются методы теории дифференциальных уравнений с частными производными и функционального анализа.

Для доказательства существования решений рассматриваемых в работе краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными используется метод регуляризации (построение приближенных решений исходных уравнений) в совокупности с методом априорных оценок. Затем осуществляется предельный переход с использованием результатов теории компенсированной компактности и метода монотонности с целью обоснования слабого предельного перехода в нелинейных членах.

Основные результаты. На защиту выносятся следующие основные результаты:

1. Доказано существование слабых обобщенных решений первой краевой задачи для уравнений, описывающих установившееся баротропное движение двухкомпонентных смесей вязких сжимаемых жидкостей в случае трех пространственных переменных.

2. Доказано существование слабых обобщенных решений краевой задачи для многомерных уравнений движения двухкомпонентных смесей вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей в стационарном случае.

Научная новизна. Все основные результаты, изложенные в диссертации, являются новыми и подтверждены полными доказательствами.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Все основные результаты в ней формулируются в виде математических теорем и сопровождаются строгими доказательствами. Практическая ценность работы следует из возможных приложений результатов диссертации для построения численных алгоритмов решения рассматриваемых в ней задач.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались

- на семинарах кафедры дифференциальных уравнений ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет» «Краевые задачи механики сплошных сред» (руководитель семинара - профессор Н. А. Кучер),
- на семинаре Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН «Математические проблемы механики сплошных сред» (руководитель семинара – член-корр. РАН П. И. Плотников),
- на семинаре Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы анализа» (руководители семинара – профессор В. С. Белоносов, д-р физ.-мат. наук М. В. Фокин),
- на семинаре кафедры по новым информационным технологиям Кемеровского государственного университета «Информационные технологии и математическое моделирование» (руководитель семинара – профессор К. Е. Афанасьев),

а также на следующих научных конференциях:

- II (XXXIV) и IV (XXXVI) Международные конференции студентов и молодых ученых "Образование, наука, инновации - вклад молодых исследователей" (Кемерово, 2007 г., 2009 г.),

- VII Всероссийская конференция "Инновационные недра Кузбасса. IT – технологии-2008" (Кемерово, 2008 г.),
- 9 Всероссийская конференция "Краевые задачи и математическое моделирование" (Новокузнецк, 2008 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-8], список которых приведен в конце автореферата. Доля авторского участия в совместных публикациях составляет 50-70%, причем доказательство основных научных положений принадлежит диссертанту лично.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 99 страницах машинописного текста и состоит из введения, двух глав и списка литературы из 58 наименований.

Краткое содержание диссертации

Введение включает в себя обзор литературы по теме диссертации, краткое описание рассматриваемых в работе задач и полученных результатов.

В первой главе рассматривается задача об установившемся баротропном движении двухкомпонентной смеси вязких сжимаемых жидкостей в следующей постановке.

Задача А.

Смесь занимает ограниченную область $\Omega \subset R^3$ евклидова пространства точек $x = (x_1, x_2, x_3)$ граница $\partial\Omega$ которой принадлежит классу C^2. Требуется найти векторные поля скоростей $\vec{u}^{(i)}$, $i = 1,2$ и скалярные поля плотностей ρ_i, $i = 1,2$ составляющих смеси, удовлетворяющие следующим уравнениям и краевым условиям:

$$div(\rho_i \vec{u}^{(i)}) = 0 \text{ в } \Omega, \quad i = 1,2, \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{2} L_{ij}\vec{u}^{(j)} + div(\rho_i \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}) + \nabla p_i = \vec{J}^{(i)} + \rho_i \vec{f}^{(i)} \text{ в } \Omega, \quad i = 1,2, \tag{10}$$

$$\vec{u}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad i = 1,2, \tag{11}$$

$$\int_{\Omega} \rho_i dx = M_i, \quad i = 1,2, \quad M_i = const > 0. \tag{12}$$

Здесь операторы

$$L_{ij} = -\mu_{ij}\Delta - (\lambda_{ij} + \mu_{ij})\nabla div, \quad i, j = 1,2, \; \lambda_{12} + 2\mu_{12} = 0 \tag{13}$$

определены так, что для некоторой постоянной $C_0 > 0$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Omega} L_{ij}\vec{u}^{(j)} \cdot \vec{u}^{(i)} dx \geq C_0 \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} |\nabla \vec{u}^{(i)}|^2 dx, \tag{14}$$

вытекающее из втрого закона термодинамики. Предполагается, что давление $p_i = \rho_i^{\gamma}$, $i = 1,2,$ где $\gamma > 1$ – показатель адиабаты, а интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси $\vec{J}^{(i)} = (-1)^{i+1} a(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}),\ i = 1,2$, где $a > 0$ – заданная постоянная. Массовые силы $\vec{f}^{(1)}$ и $\vec{f}^{(2)}$ считаются непрерывными векторными полями.

В дальнейшем будут использоваться обычные обозначения $L^p \left(W^{l,p}\right)$ для пространств функций, интегрируемых со степенью $p \geq 1$ (вместе с обобщенными производными до порядка $l \geq 0$). Через $C^l\left(\overline{\Omega}\right)$ ($C_0^l\left(\overline{\Omega}\right)$) обозначим банахово пространство l раз непрерывно дифференцируемых функций (обращающихся в нуль на $\partial\Omega$), $l \geq 0$. Обозначения пространств для векторных функций будем использовать такие же, как и для скалярных функций, а принадлежность $\vec{u} \in X$ будем понимать как $u_i \in X, \quad i = 1,...,n, \quad \vec{u} = \left(u_1,...,u_n\right)$.

Определение 1.1. *Обобщенным решением краевой задачи А называются неотрицательные функции* $\rho_i \in L^1(\Omega)$, $i = 1,2$ *и векторные поля* $\vec{u}^{(i)} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $i = 1,2$, *удовлетворяющие следующим условиям:*

(***A1***)

$$\int_{\Omega} \rho_i dx = M_i, \quad \rho_i \vec{u}^{(i)} \in L^1(\Omega), \quad p_i(\rho_i) \in L^1_{loc}(\Omega), \quad \rho_i |\vec{u}^{(i)}|^2 \in L^1_{loc}(\Omega), \quad i = 1,2;$$

(***A2***) *для любых дифференцируемых функций* G_i *с ограниченными производными* $G_i' \in C(R)$, $i = 1,2$ *и произвольных функций* $\psi_i \in C^1(\Omega)$, $i = 1,2$ *выполняются интегральные тождества*

$$\int\limits_{\Omega}\Big(G_i(\rho_i)\vec{u}^{(i)}\cdot\nabla\psi_i+\big(G_i(\rho_i)-G_i'(\rho_i)\rho_i\big)\,\psi_i\, div\vec{u}^{(i)}\Big)dx=0,\quad i=1,2;$$

($\boldsymbol{A3}$) *для любых векторных полей* $\vec{\varphi}^{(i)}\in C_0^\infty(\Omega)$, $i=1,2$ *выполняются интегральные тождества*

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\mu_{ij}\int\limits_{\Omega}\nabla\vec{u}^{(j)}:\nabla\vec{\varphi}^{(i)}dx+(\lambda_{ij}+\mu_{ij})\int\limits_{\Omega}div\vec{u}^{(j)}div\vec{\varphi}^{(i)}dx\right)-$$

$$-\int\limits_{\Omega}\rho_i\vec{u}^{(i)}\otimes\vec{u}^{(i)}:\nabla\vec{\varphi}^{(i)}dx=\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\gamma}\,div\vec{\varphi}^{(i)}dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}(\vec{J}^{(i)}+\rho_i\vec{f}^{(i)})\cdot\vec{\varphi}^{(i)}dx,\quad i=1,2.$$

Основной результат первой главы формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Для любых* $\vec{f}^{(i)}\in C(\Omega)$, $i=1,2$, $\gamma>3$ *краевая задача А имеет по крайней мере одно обобщенное решение.*

Обобщенное решение задачи А получено как предел решений следующей краевой задачи:

$$-\varepsilon\Delta\rho_i^{\varepsilon}+div(\rho_i^{\varepsilon}\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)})+\varepsilon\rho_i^{\varepsilon}=\varepsilon\frac{M_i}{|\Omega|}\ в\ \Omega,\quad i=1,2, \tag{15}$$

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{2}L_{ij}\vec{u}_{\varepsilon}^{(j)}+\frac{\varepsilon}{2}\rho_i^{\varepsilon}\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{M_i}{|\Omega|}\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}+\frac{1}{2}\rho_i^{\varepsilon}(\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}\cdot\nabla)\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}+\\ +\frac{1}{2}div(\rho_i^{\varepsilon}\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}\otimes\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)})+\nabla p_i^{\varepsilon}=\vec{J}_{\varepsilon}^{(i)}+\rho_i^{\varepsilon}\vec{f}^{(i)}\ в\ \Omega,\quad i=1,2,\end{gathered} \tag{16}$$

$$\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}=0,\quad \nabla\rho_i^{\varepsilon}\cdot\vec{n}=0\ на\ \partial\Omega,\quad i=1,2, \tag{17}$$

$$\int\limits_{\Omega}\rho_i^{\varepsilon}dx=M_i,\quad i=1,2, \tag{18}$$

которую условимся называть *задачей* A_ε. Здесь $p_i^{\varepsilon}=(\rho_i^{\varepsilon})^{\gamma}$, $\vec{J}_{\varepsilon}^{(i)}=(-1)^{i+1}a(\vec{u}_{\varepsilon}^{(2)}-\vec{u}_{\varepsilon}^{(1)})$, $i=1,2$, $|\Omega|=meas(\Omega)$, $\varepsilon\in(0,1]$, $\vec{n}$ – вектор единичной внешней нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω.

Сначала доказывается существование сильного обобщенного решения задачи A_ε.

Определение 1.2. *Сильным обобщенным решением задачи* A_ε *называются неотрицательные функции* $\rho_i^{\varepsilon}\in W^{2,q}(\Omega)$ $\forall$ $1\le q<\infty$,

$\int\limits_{\Omega}\rho_i^\varepsilon dx = M_i$, $i=1,2$ *и векторные поля* $\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \in W^{2,q}(\Omega)$ $\forall$ $1 \le q < \infty$, $i=1,2$ *такие, что уравнения (15), (16) выполнены п. в. в* Ω *и п. в. на* $\partial\Omega$ *- краевые условия (17).*

Теорема 1.2. *Для любых* $\vec{f}^{(i)} \in C(\Omega)$, $i=1,2$, $\gamma > 3$ *краевая задача* A_ε *имеет по крайней мере одно сильное обобщенное решение, которое удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\left\|\rho_i^\varepsilon\right\|_{L^{2\gamma}(\Omega)} + \left\|\vec{u}_\varepsilon^{(i)}\right\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} + \left\|\varepsilon\nabla\rho_i^\varepsilon\right\|_{L^{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)}\right) \le C, \tag{19}$$

где постоянная $C > 0$ *зависит только от* $\|\vec{f}^{(i)}\|_{C(\Omega)}$, λ_{ij}, μ_{ij}, γ, $|\Omega|$, M_i, *а и не зависит от параметра* ε.

Затем, на основании априорной оценки (19), совершается предельный переход в слабом смысле в уравнениях (15)-(16) при $\varepsilon \to 0$. Основная проблема здесь связана с предельным переходом в последовательности функций давления $p_i^\varepsilon = (\rho_i^\varepsilon)^\gamma$, $i=1,2$ при $\varepsilon \to 0$. В силу оценки (19) $\rho_i^\varepsilon \to \rho_i$ слабо в $L^{2\gamma}(\Omega)$, $p_i^\varepsilon \to \overline{p_i}$ слабо в $L^2(\Omega)$, $i=1,2$. Так как априори известно, что последовательности ρ_i^ε, $i=1,2$ только интегрируемы в пространстве $L^{2\gamma}(\Omega)$, $\gamma > 3$, равенства $\overline{p_i} = (\rho_i)^\gamma$, $i=1,2$ далеко не очевидны. Для доказательства данных равенств обобщается техника, развитая Э. *Файрайзелом* для классической модели Навье-Стокса, связанная с регулярностью так называемых эффективных вязких потоков компонент смеси.

Во второй главе рассматривается задача об установившемся движении двухкомпонентной смеси вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей в следующей постановке.

Задача Б.

Смесь занимает ограниченную область $\Omega \subset R^3$ евклидова пространства точек $x=(x_1,x_2,x_3)$ граница $\partial\Omega$ которой принадлежит классу C^2. Требуется найти векторные поля скоростей $\vec{u}^{(i)}$, $i=1,2$, скалярные поля плотностей ρ_i

и температур θ_i, $i=1,2$ составляющих смеси, удовлетворяющие следующим уравнениям и краевым условиям:

$$div(\rho_i \vec{u}^{(i)}) = 0 \text{ в } \Omega, \quad i=1,2, \tag{20}$$

$$\sum_{j=1}^{2} L_{ij}\vec{u}^{(j)} + div(\rho_i \vec{u}^{(i)} \otimes \vec{u}^{(i)}) + \nabla p_i = \vec{J}^{(i)} + \rho_i \vec{f}^{(i)} \text{ в } \Omega, \quad i=1,2, \tag{21}$$

$$div(\rho_i \theta_i \vec{u}^{(i)}) + div\vec{q}^{(i)} = -\rho_i \theta_i div\vec{u}^{(i)} + \Gamma_i \text{ в } \Omega, \quad i=1,2, \tag{22}$$

$$\vec{u}^{(i)} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad i=1,2, \tag{23}$$

$$k_i(\theta_i)\nabla\theta_i \cdot \vec{n} + L(\theta_i)(\theta_i - \widehat{\theta}) = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad i=1,2, \tag{24}$$

$$\int_{\Omega} \rho_i \, dx = M_i > 0, \quad i=1,2. \tag{25}$$

В уравнениях (21) операторы L_{ij} определены по формуле (13) и при этом выполняется неравенство (14). Кроме того, предполагаются выполненными следующие соотношения:

$$p_i = \rho_i^{\gamma} + \rho_i \theta_i, \quad i=1,2, \quad \gamma > 1$$

- давление i-ой составляющей смеси,

$$\vec{q}^{(i)} = -k_i(\theta_i)\nabla\theta_i, \quad i=1,2, \quad где\ k_i(\theta_i) = 1 + \theta_i^m, \quad i=1,2, \quad m > 1$$

- вектор теплового потока i-ой компоненты смеси,

$$\vec{J}^{(i)} = (-1)^{i+1} a(\vec{u}^{(2)} - \vec{u}^{(1)}), \quad i=1,2, \quad a > 0$$

- интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси,

$$\Gamma_i = (-1)^{i+1} b(\theta_2 - \theta_1) + \frac{a}{2}|\vec{u}^{(1)} - \vec{u}^{(2)}|^2, \quad i=1,2, \quad b > 0$$

- интенсивность обмена энергией между составляющими смеси,

$$L(\theta_i) = 1 + \theta_i^{m-1}, \quad i=1,2.$$

В краевых условиях (24) предполагается, что $\widehat{\theta} > 0$ - известная достаточно гладкая функция. Массовые силы $\vec{f}^{(1)}$ и $\vec{f}^{(2)}$ в уравнениях (21) считаются заданными непрерывными векторными полями. Величины M_i, λ_{ij}, μ_{ij}, γ, a, m и b считаются заданными константами.

Определение 2.1. *Обобщенным решением краевой задачи Б называются неотрицательные функции* $\rho_i \in L^1(\Omega)$, $\theta_i \in W^{1,\frac{3}{2}}(\Omega)$, $i=1,2$ *и векторные поля* $\vec{u}^{(i)} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $i=1,2$, *удовлетворяющие следующим условиям:*

(***Б1***)

$$\int\limits_{\Omega}\rho_i\,dx = M_i,\quad \rho_i\theta_i \in L^2(\Omega),\quad \rho_i\vec{u}^{(i)} \in L^1(\Omega),\quad \theta_i^m\nabla\theta_i \in L^1(\Omega),$$

$$\rho_i^{\gamma} \in L^1_{loc}(\Omega),\quad \rho_i\,|\vec{u}^{(i)}|^2 \in L^1_{loc}(\Omega),\quad i=1,2;$$

(***Б2***) *для любых дифференцируемых функций* G_i *с ограниченными производными* $G_i' \in C(R)$, $i=1,2$ *и произвольных функций* $\psi_i \in C^1(\Omega)$, $i=1,2$ *выполняются интегральные тождества*

$$\int\limits_{\Omega}\Big(G_i(\rho_i)\vec{u}^{(i)}\cdot\nabla\psi_i + \big(G_i(\rho_i) - G_i'(\rho_i)\rho_i\big)\psi_i\,div\vec{u}^{(i)}\Big)dx = 0,\quad i=1,2;$$

(***Б3***) *для любых векторных полей* $\vec{\varphi}^{(i)} \in C_0^{\infty}(\Omega)$, $i=1,2$ *выполняются интегральные тождества*

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\mu_{ij}\int\limits_{\Omega}\nabla\vec{u}^{(j)}:\nabla\vec{\varphi}^{(i)}dx + (\lambda_{ij}+\mu_{ij})\int\limits_{\Omega}div\vec{u}^{(j)}div\vec{\varphi}^{(i)}dx\right) -$$

$$-\int\limits_{\Omega}\rho_i\vec{u}^{(i)}\otimes\vec{u}^{(i)}:\nabla\vec{\varphi}^{(i)}dx = \int\limits_{\Omega}\rho_i^{\gamma}\,div\vec{\varphi}^{(i)}dx +$$

$$+\int\limits_{\Omega}\rho_i\theta_i\,div\vec{\varphi}^{(i)}dx + \int\limits_{\Omega}(\vec{J}^{(i)} + \rho_i\vec{f}^{(i)})\cdot\vec{\varphi}^{(i)}dx,\quad i=1,2;$$

(***Б4***) *для любых функций* $\eta_i \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, $i=1,2$ *выполняются интегральные тождества*

$$-\int\limits_{\Omega}\rho_i\theta_i\vec{u}^{(i)}\cdot\nabla\eta_i\,dx + \int\limits_{\partial\Omega}L(\theta_i)(\theta_i-\widehat{\theta})\eta_i\,d\sigma + \int\limits_{\Omega}k_i(\theta_i)\nabla\theta_i\cdot\nabla\eta_i\,dx =$$

$$= -\int\limits_{\Omega}\rho_i\theta_i\,div\vec{u}^{(i)}\eta_i\,dx + \int\limits_{\Omega}\Gamma_i\eta_i\,dx,\quad i=1,2.$$

Основной результат второй главы формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Для любых* $\vec{f}^{(i)} \in C(\Omega)$, $i=1,2$, $\widehat{\theta} \in C^1(\partial\Omega)$, $\widehat{\theta} > 0$, $m > \dfrac{6(\gamma-1)(2\gamma-1)}{(\gamma-3)(6\gamma-1)}$, $\gamma > 3$ *краевая задача Б имеет по крайней мере одно обобщенное решение.*

Обобщенное решение задачи Б получено как предел решений следующей регуляризованной краевой задачи:

$$-\varepsilon\Delta\rho_i^\varepsilon + div(\rho_i^\varepsilon \vec{u}_\varepsilon^{(i)}) + \varepsilon\rho_i^\varepsilon = \varepsilon \frac{M_i}{|\Omega|} \text{ в } \Omega, \quad i = 1,2, \tag{26}$$

$$\begin{gathered}\sum_{j=1}^{2} L_{ij}\vec{u}_\varepsilon^{(j)} + \frac{\varepsilon}{2}\rho_i^\varepsilon \vec{u}_\varepsilon^{(i)} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{M_i}{|\Omega|}\vec{u}_\varepsilon^{(i)} + \frac{1}{2}\rho_i^\varepsilon (\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \cdot \nabla)\vec{u}_\varepsilon^{(i)} + \\ + \frac{1}{2} div(\rho_i^\varepsilon \vec{u}_\varepsilon^{(i)} \otimes \vec{u}_\varepsilon^{(i)}) + \nabla p_i^\varepsilon = \vec{J}_\varepsilon^{(i)} + \rho_i^\varepsilon \vec{f}^{(i)} \text{ в } \Omega, \quad i = 1,2,\end{gathered} \tag{27}$$

$$div(\rho_i^\varepsilon \theta_i^\varepsilon \vec{u}_\varepsilon^{(i)}) - div\left(k_i(\theta_i^\varepsilon) \frac{\varepsilon + \theta_i^\varepsilon}{\theta_i^\varepsilon} \nabla \theta_i^\varepsilon \right) = -\rho_i^\varepsilon \theta_i^\varepsilon div \vec{u}_\varepsilon^{(i)} + \Gamma_i^\varepsilon \text{ в } \Omega, \quad i = 1,2, \tag{28}$$

$$\begin{gathered}\vec{u}_\varepsilon^{(i)} = 0, \quad \nabla\rho_i^\varepsilon \cdot \vec{n} = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad i = 1,2, \\ k_i(\theta_i^\varepsilon) \frac{\varepsilon + \theta_i^\varepsilon}{\theta_i^\varepsilon} \nabla\theta_i^\varepsilon \cdot \vec{n} + \varepsilon \ln \theta_i^\varepsilon + L(\theta_i^\varepsilon)(\theta_i^\varepsilon - \widehat{\theta}) = 0 \text{ на } \partial\Omega, \quad i = 1,2,\end{gathered} \tag{29}$$

$$\int_\Omega \rho_i^\varepsilon \, dx = M_i, \quad i = 1,2, \tag{30}$$

которую условимся называть *задачей* $Б_\varepsilon$. Здесь $p_i^\varepsilon = (\rho_i^\varepsilon)^\gamma + \rho_i^\varepsilon \theta_i^\varepsilon$, $\vec{J}_\varepsilon^{(i)} = (-1)^{i+1} a(\vec{u}_\varepsilon^{(2)} - \vec{u}_\varepsilon^{(1)})$, $\Gamma_i^\varepsilon = (-1)^{i+1} b(\theta_2^\varepsilon - \theta_1^\varepsilon) + \frac{a}{2} |\vec{u}_\varepsilon^{(1)} - \vec{u}_\varepsilon^{(2)}|^2$, $i = 1,2$, $\varepsilon \in (0,1]$.

Как и в первой главе, сначала доказывается существование сильного обобщенного решения задачи $Б_\varepsilon$, которым называются неотрицательные функции $\rho_i^\varepsilon \in W^{2,q}(\Omega)$ $\forall$ $1 \le q < \infty$, $\int_\Omega \rho_i^\varepsilon \, dx = M_i$, $i = 1,2$, положительные функции $\theta_i^\varepsilon \in W^{2,q}(\Omega)$ $\forall$ $1 \le q < \infty$, $i = 1,2$ и векторные поля $\vec{u}_\varepsilon^{(i)} \in W^{2,q}(\Omega)$ $\forall$ $1 \le q < \infty$, $i = 1,2$ такие, что уравнения (26)-(28) выполнены п.в. в Ω и п.в. на $\partial\Omega$ - краевые условия (29).

Теорема 2.2. *Для любых* $\vec{f}^{(i)} \in C(\Omega)$, $i = 1,2$, $\widehat{\theta} \in C^1(\partial\Omega)$, $\widehat{\theta} > 0$, $m > \frac{6(\gamma - 1)(2\gamma - 1)}{(\gamma - 3)(6\gamma - 1)}$, $\gamma > 3$ *краевая задача* $Б_\varepsilon$ *имеет по крайней мере одно сильное обобщенное решение, которое удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{i=1}^{2}\Bigg(\left\|\rho_i^{\varepsilon}\right\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}+\left\|\vec{u}_{\varepsilon}^{(i)}\right\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}+\left\|\varepsilon\nabla\rho_i^{\varepsilon}\right\|_{L^{\frac{6\gamma}{\gamma+3}}(\Omega)}+\left\|\theta_i^{\varepsilon}\right\|_{L^{3m}(\Omega)}+$$
$$+\left\|\nabla\theta_i^{\varepsilon}\right\|_{L^2(\Omega)}+\int_{\partial\Omega}(e^{s_i^{\varepsilon}}+e^{-s_i^{\varepsilon}})d\sigma+\left\|\nabla s_i^{\varepsilon}\right\|_{L^2(\Omega)}\Bigg)\le C, \tag{31}$$

где $s_i^{\varepsilon}=\ln\theta_i^{\varepsilon}$, *постоянная* $C>0$ *зависит только от* $\left\|\vec{f}^{(i)}\right\|_{C(\Omega)}$, $\left\|\hat{\theta}\right\|_{C(\partial\Omega)}$, λ_{ij}, μ_{ij}, m, γ, $|\Omega|$, $|\partial\Omega|$, a, M_i *и не зависит от параметра* ε.

Значительную часть второй главы занимает процедура предельного перехода в слабом смысле в уравнениях (26)-(28) при $\varepsilon\to 0$. Процедура предельного перехода опирается на те же идеи, которые были использованы в первой главе и отличается уровнем технических сложностей.

Автор диссертации выражает глубокую признательность своему научному руководителю – профессору, доктору физико-математических наук Н. А. Кучеру, а также члену-корреспонденту РАН П. И. Плотникову за постоянное внимание к работе и многочисленные обсуждения.

Список работ автора по теме диссертации

1. *Кучер Н.А., Прокудин Д.А.* Об установившемся течении смеси вязких несжимаемых жидкостей // Вестник Кемеровского государственного университета. 2007. Выпуск 4 (32). С. 13-18.
2. *Кучер Н.А., Прокудин Д.А.* Об одной модели, описывающей баротропное течение смеси вязких сжимаемых жидкостей // Сборник научных трудов VII Всероссийской научно-практической конференции «Инновационные недра Кузбасса. IT-технологии-2008». Кемерово, 2008. С. 372-377.
3. *Прокудин Д.А. Шестаков М.М.* Об установившемся течении смеси вязких несжимаемых жидкостей в цилиндрических трубах // Сборник статей 9-ой Всероссийской научной конференции "Краевые задачи и математическое моделирование". Новокузнецк, 2008. Т. 1. С. 107-111.
4. *Прокудин Д.А., Трофимова О.С.* Стационарное движение смесей вязких несжимаемых жидкостей между двумя параллельными стенками // Вестник Кемеровского государственного университета. 2009. Выпуск 1 (37). С. 20-23.

5. *Кучер Н.А., Прокудин Д.А.* Стационарные решения уравнений смесей вязких сжимаемых теплопроводных жидкостей // Вестник Кемеровского государственного университета. 2009. Выпуск 1 (37). С. 9-19.
6. *Кучер Н.А., Прокудин Д.А.* Разрешимость уравнений баротропных течений смесей вязких сжимаемых жидкостей. Кемеровский гос. университет. Кемерово, 2009. Деп. в ВИНИТИ, № 339-В2009. 32 С.
7. *Кучер Н.А., Прокудин Д.А.* Корректность первой краевой задачи для уравнений смесей вязких сжимаемых жидкостей // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 3. С. 33-53.
8. *Кучер Н.А., Прокудин Д.А.* Стационарные решения уравнений смеси вязких сжимаемых жидкостей // Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. 12, № 3 (39). С. 52-65.

Редактор Л. М. Борискина
Подписано к печати 10.03.2010 г. Формат 60×84 1/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная № 1. Печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,0.
Тираж 100 экз. Заказ № 32.

ГОУ ВПО «Кемеровский государственный университет».
650043, Кемерово, ул. Красная, 6.
Отпечатано в типографии издательства «Кузбассвузиздат».
650043, Кемерово, ул. Ермака, 7.