На правах рукописи

Головин Сергей Валерьевич

ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Специальность: 01.01.02 — дифференциальные уравнения

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск — 2009

Работа выполнена в Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН (г. Новосибирск)

Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, чл.-корр. РАН Ю. Н. Павловский,
	доктор физико-математических наук, профессор В. К. Андреев,
	доктор физико-математических наук, профессор Ю. Н. Григорьев
Ведущая организация:	Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Защита состоится «___» _________ 2009 года в __ часов на заседании диссертационного совета Д 212.174.02 при Новосибирском государственном университете по адресу: ул. Пирогова, д. 2, г. Новосибирск, 630090.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного университета.

Автореферат разослан «___» ________ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.174.02
доктор физико-математических наук Н. И. Макаренко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследований. Модель идеальной магнитной гидродинамики описывает макроскопические движения идеально проводящего газа под действием внутреннего давления, магнитных и инерционных сил. Область применения модели идеальной магнитной гидродинамики чрезвычайно широка — от задач термоядерного синтеза до астрофизики. Популярность модели объясняется ее сравнительной простотой и вместе с тем богатством математического содержания и разнообразием описываемых физических явлений. Хорошо исследованные в настоящее время одномерные либо линейные постановки не всегда удовлетворяют предъявляемым физическим требованиям. В то же время численный анализ затруднен существенной многомерностью исследуемых процессов, наличием разнообразных типов слабых и сильных разрывов. В этой связи актуальными являются аналитические исследования, направленные на описание особенностей, связанных с нелинейным и многомерным характером движений плазмы на основе точных решений. Основным методом построения точных решений для нелинейных систем уравнений является групповой анализ дифференциальных уравнений.

Многие классические модели механики сплошных сред допускают бесконечномерную группу симметрий. Важную роль в применении этих групп к практическим задачам (построение точных решений, задачи эквивалентности и группового расслоения) играет множество их дифференциальных инвариантов. Данное бесконечномерное множество обладает определенной структурой: имеется конечный базис, из которого все инварианты получаются посредством инвариантных дифференцирований и функциональных операций. Таким образом, актуальным является описание базисов дифференциальных инвариантов для бесконечномерных групп Ли, допускаемых основными моделями динамики жидкости и газа.

Целью работы является систематическое построение и изучение частично инвариантных решений для системы уравнений идеальной магнитной гидродинамики и газовой динамики, а также развитие методов группового анализа для отыскания и использования базисов дифференциальных инвариантов бесконечномерных групп Ли.

Научная новизна работы. В работе впервые проведен систематический анализ частично инвариантных решений для нелинейной системы уравнений идеальной магнитогидродинамики. Обнаружено свойство иерархии на множестве частично инвариантных подмоделей произвольной системы уравнений. Построена иерархия частично инвариантных подмоделей для уравнений магнитной гидродинамики. Выявлены три основных вида подмоделей: вихрь Овсянникова и его обобщения, решения с линейным по части переменных полем скорости и решения с полным давлением, зависящим только от времени. Впервые дан геометрический алгоритм использования функционального произвола в решениях типа вихря Овсянникова. Исследованы подмодели вихря Овсянникова (автомодельная, стационарная, с линейным полем скорости и другие). Доказана невозможность обобщения вихря Овсянникова на решения с произвольными поверхностями уровня. Дан геометрический алгоритм построения безвихревых векторных полей, частично инвариантных относительно группы вращений и доказано, что в вихре Овсянникова ротор скорости не равен нулю. Предложен оригинальный геометрический подход, дающий исчерпывающее описание стационарных течений идеальной несжимаемой плазмы с постоянным полным давлением.

В диссертации впервые найдены базисы дифференциальных инвариантов и операторы инвариантного дифференцирования для бесконечномерных групп Ли, допускаемых уравнениями Навье — Стокса и Эйлера, стационарной газовой динамики, уравнения Кармана — Гудерлея. Для ряда перечисленных моделей впервые построены групповые расслоения относительно допускаемых бесконечномерных групп.

Впервые систематически описан важный класс инвариантных решений для уравнения Кармана — Гудерлея для пространственных околозвуковых течений газа, обнаружены режимы течения с ударной волной в виде винтовой поверхности. Построены и описаны точные решения с линейным по части переменных полем скорости для уравнений газовой динамики.

Теоретическая и практическая ценность работы. Найденные в диссертации точные решения уравнений механики дают новую важную информацию о движениях сплошных сред под воздействием магнитных полей. Данные решения могут применяться для описания реальных физических процессов, а также служить тестами для разработки алгоритмов численного расчета магнитогидродинамических течений. Найденные в работе базисы дифференциальных инвариантов дают исчерпывающее описание бесконечного множества инвариантов рассматриваемых групп Ли и могут применяться для установления (не)эквивалентности многообразий под действием рассматриваемых групп, служить для построения новых дифференциально инвариантных решений исследуемых уравнений. Диссертация является опытом успешного систематического применения теории частично инвариантных решений и дифференциальных инвариантов для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Разработанные подходы могут быть эффективны в других задачах теории дифференциальных уравнений, математической физики и механики сплошных сред. Результаты и методы работы активно используются в научно-исследовательских работах, проводимых в ИГиЛ СО РАН в течение 2000–2009 гг., а также в курсах лекций и практических занятиях, читаемых в Новосибирском госуниверситете.

Основные результаты работы.

- Полное описание регулярных частично инвариантных решений дефекта 1 уравнений идеальной магнитной гидродинамики:
  - введено понятие иерархии частично инвариантных решений произвольной системы дифференциальных уравнений;
  - построена полная иерархия частично инвариантных решений для уравнений идеальной магнитной гидродинамики;

  - построены и описаны решения типа вихря Овсянникова, даны геометрические алгоритмы построения движения в целом в вихре Овсянникова;
  - получены новые примеры решений с линейным по части пространственных переменных полем скорости;
  - полностью проанализированы стационарные течения идеально проводящей жидкости с постоянным полным давлением.

- Построение и использование базисов дифференциальных инвариантов для бесконечномерных групп Ли:

  - вычислены базисы дифференциальных инвариантов для бесконечномерных групп симметрий основных моделей механики сплошных сред;
  - построены новые примеры групповых расслоений уравнений механики относительно допускаемых бесконечномерных групп Ли.

- Построение и анализ подмоделей уравнений газовой динамики:

  - полностью описаны инвариантные подмодели уравнения околозвукового движения газа;
  - построены и проанализированы точные решения эволюционных подмоделей с двумя независимыми переменными с однородной деформацией.

Апробация работы. Основные результаты диссертации опубликованы в 13 статьях без соавторов в журналах из перечня ВАК научных изданий, рекомендованных для публикации результатов диссертаций. Кроме того, по теме диссертации имеется 3 препринта и 8 статей в трудах международных конференций. Результаты докладывались на научных семинарах под руководством академика Л.В. Овсянникова (ИГиЛ СО РАН), академика Г.Г. Черного (ИМех МГУ), академика А.Г. Куликовского, д.ф.-м.н. А.А. Бармина и

д.ф.-м.н. В.П. Карликова (ИМех МГУ), чл.-корр. РАН П.И. Плотникова (ИГиЛ СО РАН), чл.-корр. РАН И.А. Тайманова (ИМ СО РАН), чл.-корр. РАН В.М. Тешукова и д.ф.-м.н. В.Ю. Ляпидевского (ИГиЛ СО РАН), д.ф.-м.н. В.К. Андреева (ИВМ СО РАН), д.ф.-м.н. В.С. Белоносова и д.ф.-м.н. М.В. Фокина (ИМ СО РАН), д.ф.-м.н. А.М. Блохина (ИМ СО РАН), проф. В.А. Кондратьева и проф. Е.В. Радкевича (МГУ), д.ф.-м.н. Э.А. Троппа (ФТИ им. Иоффе), д.ф.-м.н. О.И. Богоявленского (Queen's University, Kingston, Canada), семинаре LEGI (J. Fourier Universite, Grenoble, France), а также на научных конференциях по математике и механике, среди которых
— Всероссийская конференция «Аналитические методы и оптимизация процессов в механике жидкости и газа (САМГАД)» (Пермь, 2000; Снежинск, 2002; Абрау-Дюрсо, 2004; Санкт-Петербург, 2006),
— Международная конференция «Современный групповой анализ (MOGRAN)» (Уфа, 2000; Москва, 2002; Кипр, 2004; Швеция, 2007),
— Международная конференция по дифференциальным уравнениям (EquaDiff-2003) (Хассельт, Бельгия, 2003),
— VIII Всероссийский конгресс по теоретической и прикладной механике (Пермь, 2001),
— Всероссийская конференция «Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение» (Новосибирск, 2004, 2009),
— IV Европейский конгресс по математике (Стокгольм, Швеция, 2004),
— VI Международная конференция «Геометрия, интегрируемость и квантование» (Варна, Болгария, 2004),
— Международная конференция «Симметрии в нелинейной математической физике» (Киев, Украина, 2003, 2005, 2007, 2009),
— VI Международная конференция «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 2005),
— Летняя программа «Симметрии и переопределенные системы дифференциальных уравнений в частных производных» (Миннеаполис, США, 2006),
— Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы (Конференция Петровского)» (Москва, 2007),
— Международная конференция «Дифференциальные уравнения.

Функциональные пространства. Теория приближений», посвященная 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева (Новосибирск, 2008),
— Международная конференция «Волны и неустойчивости в геофизических и астрофизических потоках» (о. Поркероль, Франция, 2009).

Работа автора по данной тематике поддерживалась грантами российских организаций (РФФИ, Минобрнауки РФ, СО РАН, Фонда содействия отечественной науке).

Структура работы. Диссертация состоит из введения и трех частей, включающих восемь глав. Работа содержит 315 страниц, 44 рисунка, 6 таблиц и список литературы из 199 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во *введении* обосновывается актуальность темы диссертации, описывается ее структура и формулируются основные результаты. Диссертация состоит из трех частей, включающих восемь глав. Первая часть, являющаяся основной, посвящена классификации, построению и исследованию точных частично инвариантных решений для уравнений идеальной магнитогидродинамики. Здесь дается введение в теорию частично инвариантных решений, доказываются общая теорема об иерархии частично инвариантных решений произвольной системы дифференциальных уравнений, строится иерархия частично инвариантных решений для уравнений магнитной гидродинамики, подробно описываются отдельные классы решений. Большое внимание уделено описанию движений, задаваемых плоским и сферическим вихрями Овсянникова, а также построению точных решений, задающих стационарные течения несжимаемой плазмы с постоянным полным давлением.

Вторая часть диссертации посвящена построению и использованию базисов дифференциальных инвариантов для бесконечномерных групп Ли, допускаемых основными моделями механики сплошных сред. Построены базисы инвариантов для многих конкретных групп Ли, приведены примеры их использования для построения классов дифференциально инвариантных решений и группового расслоения этих систем относительно бесконечномерной части допускаемой моделями группы.

В третьей части диссертации полученные ранее результаты используются для построения и анализа точных решений уравнений газовой динамики. На основании построенного выше группового расслоения уравнения Кармана — Гудерлея проведено полное описание его инвариантных решений, а также построено решение типа двойной волны. Для инвариантных подмоделей с одной независимой переменной проанализирована возможность существования непрерывного во всем пространстве решения, а также дан пример решения с ударной волной в виде винтовой поверхности. Построены и изучены точные решения с линейной зависимостью части компонент скорости от части пространственных переменных, задаваемые эволюционными подмоделями ранга 2 уравнений газовой динамики. Показано, что такие решения описывают эволюцию плоских и цилиндрических слоев газа.

Первая глава диссертации посвящена общей теории частично инвариантных решений дифференциальных уравнений. Глава начинается с определений частично инвариантного многообразия относительно заданной группы преобразований и частично инвариантного решения системы дифференциальных уравнений относительно некоторой подгруппы допускаемой группы симметрий. С заданной системой уравнений E для m искомых функций $\mathbf{u}$ и n независимых переменных $\mathbf{x}$, допускающий группу преобразований (симметрий) G, рассматривается решение $U : \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$. Решение U локально определяет многообразие $U \subset \mathbb{R}^n(\mathbf{x}) \times \mathbb{R}^m(\mathbf{u})$ в пространстве независимых переменных $\mathbf{x}$ и искомых функций $\mathbf{u}$. Известно, что под действием преобразований группы симметрий любое решение системы E переходит в решение той же системы. Выбирается подгруппа $H \subset G$ и рассматривается орбита $\mathcal{O}(U, H)$ точек многообразия U под действием преобразований группы H.

Определение 1. Решение U называется инвариантным решением уравнений E, если $\dim \mathcal{O}(U, H) = \dim U$, и частично инвариантным решением уравнений E, если $\dim \mathcal{O}(U, H) - \dim \mathcal{O}(U) = \delta > 0$. Число δ называется дефектом частично инвариантного решения; число σ, равное размерности многообразия $\mathcal{O}(U, H)$ в пространстве инвариантов группы H, называется рангом решения.

Инвариантные решения обладают следующими свойствами:

- Все искомые функции получают представления через инвариантные функции, зависящие от меньшего числа переменных.
- Для нахождения инвариантных функций имеется определенная факторсистема уравнений (подмодель исходной модели) E/H, содержащая $\sigma < n$ число независимых переменных.

К числу инвариантных относятся многие классические решения: автомодельные, осесимметричные, одномерные и пр. В отличие от инвариантных, частично инвариантные решения определяются следующими характеристиками:

- Только часть искомых функций получают представления через инвариантные функции. Имеется δ неинвариантных функций, зависящих от всех независимых переменных.
- Подмодель частично инвариантного решения состоит из уравнений E/H для инвариантных функций и переопределенной системы П для неинвариантных функций, совместной на решениях системы E/H.

В силу того, что частично инвариантные подмодели подчинены меньшему количеству условий, они задают более широкие классы решений по сравнению с инвариантными подмоделями. Однако при их построении необходимо исследовать на совместность переопределенную и, вообще говоря, нелинейную систему дифференциальных уравнений П. Несмотря на то, что общая теория исследования переопределенных систем уравнений, начатая в работах французских математиков C. Riquier, M. Janet и E. Cartan, в настоящий момент достаточно развита, ее формальное применение к нелинейным системам уравнений зачастую приводит к громоздким выкладкам, не дающим обозримого результата. Поэтому математическое исследование каждой частично инвариантной подмодели является нетривиальной задачей. В то же время опыт исследования подмоделей уравнений механики сплошной среды показывает, что число неподобных частично инвариантных подмоделей может быть достаточно большим (десятки подмоделей). В этой связи требуются дополнительные признаки, позволяющие упорядочить и упростить исследование подмоделей заданной системы уравнений.

В диссертации доказывается, что для произвольной системы дифференциальных уравнений на множестве частично инвариантных решений имеется иерархическая структура. Справедлива следующая

Теорема 1. *В группе Ли G, допускаемой системой дифференциальных уравнений E, выберем две подгруппы $H \lhd N \subset G$ такие, что дефекты инвариантности H- и N-частично инвариантных решений совпадают. Тогда факторсистема частично инвариантного решения E/H допускает построение инвариантного решения относительно факторгруппы N/H. При этом факторсистема инвариантного решения $(E/H)/(N/H)$ эквивалентна факторсистеме частично инвариантного решения E/N.*

$$(E/H)/(N/H) \simeq E/N.$$

Данная теорема является обобщением леммы ЛОТ (Л.В. Овсянников, 1998) для инвариантных решений.

Определение 2. Частично инвариантная подмодель называется неприводимой, если ее нельзя представить в виде нетривиальной композиции частично инвариантной и инвариантной подмоделей.

Данная теорема позволяет значительно упростить исследование всего множества частично инвариантных подмоделей заданной системы дифференциальных уравнений. Действительно, в соответствии с теоремой 1 необходимо выделить и исследовать лишь множество неприводимых подмоделей. Все остальные получаются из них за счет инвариантных редукций, что значительно проще технически. Помимо упрощения процедуры построения решений, понятие иерархии подмоделей также полезно с физической точки зрения, поскольку все подмодели, являющиеся инвариантными редукциями некоторой неприводимой частично инвариантной подмодели, обладают схожими физическими свойствами описываемых ими решений системы уравнений E.

Во второй главе диссертации построена иерархия частично инвариантных подмоделей для уравнений идеальной магнитной гидродинамики

$$\begin{aligned}
&D\,\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0,\\
&D\,\mathbf{u} + \rho^{-1}\nabla p + \rho^{-1}\mathbf{B}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = 0,\\
&D\,p + A(p,\rho)\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0,\\
&D\,\mathbf{B} + \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{u} = 0,\\
&\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0, \quad D = \partial_t + \mathbf{u}\cdot\nabla.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{u} = (u, v, w)^{\mathrm{T}}$ — вектор скорости, $\mathbf{B} = (H, K, L)^{\mathrm{T}}$ — вектор напряженности магнитного поля; p и ρ — давление и плотность. Справедливо уравнение состояния $p = F(S, \rho)$ с энтропией S. Функция $A(p, \rho)$ определяется уравнением состояния $A = \rho\,(\partial F/\partial\rho)$. Все функции зависят от времени t и декартовых координат $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

Основная группа Ли G_{11}, допускаемая уравнениями (1), является расширением группы Галилея за счет преобразования гомотетии и порождается следующими инфинитезимальными операторами (J.C. Fuchs, 1991):

$$\begin{aligned}
&X_1 = \partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = \partial_z,\ X_4 = t\partial_x + \partial_u,\ X_5 = t\partial_y + \partial_v,\\
&X_6 = t\partial_z + \partial_w,\ X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v + K\partial_L - L\partial_K,\\
&X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w + L\partial_H - H\partial_L,\\
&X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u + H\partial_K - K\partial_H,\\
&X_{10} = \partial_t,\ X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z.
\end{aligned}$$

Структура группы G_{11} та же, что и для уравнений газовой динамики, поэтому для построения классов неэквивалентных точных решений уравнений (1) использовалась известная оптимальная система подгрупп ΘG_{11} (Л.В. Овсянников, 1994). В диссертации доказана следующая

Теорема 2. *Класс регулярных небарохронных ЧИР для уравнений МГД* (1) *исчерпывается неприводимыми подмоделями, порожда-*

емыми подалгеброй $\{X_1, X_4\}$ *(ранг 3, дефект 1), подалгебрами*

$$\{X_2,\ X_3,\ X_7\},\quad \{X_5,\ X_6,\ X_7\},\quad \{X_7,\ X_8,\ X_9\},$$
$$\{X_3 + X_5,\ X_2 - X_6,\ X_7\},\quad \{X_3,\ X_5,\ X_2 + X_6\}$$

(ранг 2, дефект 1), подалгеброй $\{X_2, X_3, X_5, X_6\}$ *(ранг 2, дефект 2) и подалгеброй* $\{X_2, X_3, X_5, X_6, X_7\}$ *(ранг 2, дефект 3).*

Показано, что все частично инвариантные подмодели дефекта 1 описывают решения, которые можно условно разделить на два класса: подмодели с линейной зависимостью части компонент скорости от части пространственных переменных и подмодели типа вихря Овсянникова. Кроме того, отдельно выделяется класс барохронных решений, в которых полное давление $p + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2$ зависит только от времени t. В диссертации полностью исследованы и приведены в инволюцию все неприводимые частично инвариантные подмодели дефекта 1.

Пример 1. Рассмотрим подмодель, порождаемую подалгеброй $\{X_3,\ X_5,\ X_2 + X_6\}$. В представлении решения имеется линейная зависимость компонент скорости от части пространственных переменных

$$u = U(t,x),\ \bar{\mathbf{v}} = M(t,x)\bar{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{b}}(t,x),\ \mathbf{B} = \mathbf{B}(t,x),$$
$$p = p(t,x),\ \rho = \rho(t,x).$$

Здесь $\bar{\mathbf{v}} = (v,w)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{y}} = (y,z)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{b}} = (b^2,b^3)^{\mathrm{T}}$, $\bar{\mathbf{B}} = (K,L)^{\mathrm{T}}$ — укороченные векторы; M — квадратная матрица размером 2×2. В результате подстановки представления решения в систему уравнений (1) и анализа условий совместности в случае плоского магнитного поля с $H = 0$ получим следующие уравнения подмодели:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{D}\rho + \rho(U_x + \operatorname{tr} M) = 0, && \widetilde{D}p + A(p,\rho)(U_x + \operatorname{tr} M) = 0,\\
&\widetilde{D}U + \rho^{-1}(p + \bar{\mathbf{B}}^2/2)_x = 0, && \widetilde{D}\psi = 0, \quad \widetilde{D} = \partial_t + U\partial_x,\\
&M = (E + tM_0)^{-1}M_0, && \bar{\mathbf{B}} = \rho\,(E + tM_0)^{-1}\,\bar{\mathbf{B}}_0/\rho_0.
\end{aligned}$$

Здесь M_0, $\bar{\mathbf{B}}_0$, ρ_0 — соответственно матрица, вектор и скаляр, произвольно зависящие от ψ. Аналогично выписываются уравнения для случая $H \neq 0$. Отметим, что в момент времени $t = -1/\lambda$ (λ — собственный корень матрицы M_0) плотность и магнитное поле неограниченно возрастают, а все частицы приходят на многообразие меньшей размерности: поверхность или прямую в зависимости от степени вырождения матрицы M_0.

В *третьей главе* диссертации подробному исследованию подвергнуты две наиболее интересных из полученных подмоделей — плоский и сферический вихри Овсянникова, порождаемые группами движений плоскости и сферы: $\{X_2, X_3, X_7\}$ и $\{X_7, X_8, X_9\}$. Для сферического вихря Овсянникова решение в сферической системе координат (r, θ, φ) имеет вид

$$\begin{aligned}
&u_r = U(t,r), \;\; u_\theta = rM(t,r)\cos\omega, \;\; u_\varphi = rM(t,r)\sin\omega, \\
&B_r = \frac{H_0}{r^2\cos\tau(t,r)}, \;\; B_\theta = \frac{N(t,r)}{r}\cos\omega, \;\; B_\varphi = \frac{N(t,r)}{r}\sin\omega, \\
&p = p(t,r), \;\; \rho = \rho(t,r).
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь H_0 — произвольная константа; $\tau(t,r)$ — вспомогательная функция. Неинвариантная функция ω предполагается зависящей от всех переменных.

Инвариантные функции определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned}
&D_0\,M + \frac{2}{r}\,UM - \frac{H_0}{r^4\rho\cos\tau}\,N_r = 0, \qquad && D_0 = \partial_t + U\partial_r, \\
&D_0\,N + NU_r - \frac{H_0}{\cos\tau}\,M_r - MN\operatorname{tg}\tau = 0, && \\
&D_0\,p + A(p,\rho)\left(U_r + \frac{2}{r}\,U - M\operatorname{tg}\tau\right) = 0, && \\
&D_0\,U + \frac{1}{\rho}\,p_r + \frac{NN_r}{r^2\rho} - rM^2 = 0, && H_0\tau_r = N\cos\tau, \\
&D_0\,\rho + \rho\left(U_r + \frac{2}{r}\,U - M\operatorname{tg}\tau\right) = 0, && D_0\tau = M.
\end{aligned} \tag{3}$$

Функция ω находится из неявного конечного соотношения

$$F(\eta, \zeta) = 0, \tag{4}$$

где

$$\eta = \sin\theta\cos\omega\cos\tau - \cos\theta\sin\tau,$$

$$\zeta = \varphi + \operatorname{arctg}\frac{\sin\omega\cos\tau}{\cos\theta\cos\omega\cos\tau + \sin\theta\sin\tau}.$$

с произвольной функцией F. Справедливы следующие общие свойства движения сплошной среды, определяемого решением (2):

Теорема 3. *В вихре Овсянникова траектории частиц и магнитные силовые линии являются плоскими кривыми, одинаковыми для всех частиц, лежащих в некоторый момент времени на одной сфере $r = r_0$. Положение и ориентация этих кривых в пространстве определяется функцией ω из решения неявного уравнения (4).*

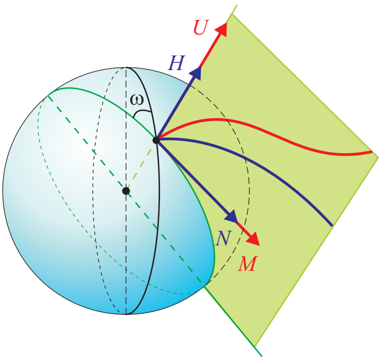

Рис. 1.

Таким образом, для построения картины движения в трехмерном пространстве необходимо решить систему уравнений (3) с некоторыми начальными данными и построить шаблон траектории частицы и магнитной силовой линии, проходящих через сферу $S^2 : r = r_0$ в фиксированный момент времени $t = t_0$. Затем необходимо построить поле направлений на сфере S^2, определяемое из неявного соотношения (4) с заданной функцией F. Общая картина движения получается присоединением шаблонов траектории и магнитной силовой линии к каждой точке сферы S^2 в соответствии с заданным полем направлений (см. рис. 1).

Важной особенностью решения является принцип суперпозиции траекторий: с одним и тем же шаблоном траекторий и магнитных силовых линий можно построить бесконечное количество различных картин движения в пространстве, варьируя поле направлений на сфере S^2 путем выбора функции F в соотношении (4).

В диссертации дан геометрический алгоритм решения неявного уравнения (4) в фиксированный момент времени $t = t_0$. Для заданной функции F определим на сфере S^2 кривую γ по следующему правилу: η — высота точки $N \in \gamma$ над экваториальной плоскостью, ζ — долгота точки N. Для заданной точки $M \in S^2$ проведем на сфере S^2 окружность S^1 геодезического радиуса $\pi/2 - \tau$. Обозначим через N_i, $i = 1, \ldots, k$ точки пересечения окружности S^1 и кривой γ. Справедлива следующая

Теорема 4. *Углы между проходящим через точку M меридианом и дугами длины $\pi/2 - \tau$, идущими из точки M в каждую из точек N_i, задают все возможные решения $\omega = \omega(t_0, M)$ неявного уравнения* (4).

Из теоремы 4 следуют свойства поля направлений, задаваемого на сфере S^2 функцией ω:

- Решение определено не на всей сфере, а только в полосе ширины $\pi - 2\tau$ с кривой γ в качестве центральной линии;
- При малых значениях τ возможно появление особенностей типа “ласточкин хвост” на эквидистантах $\gamma^{\pm}(\pi/2 - \tau)$, ограничивающих полосу определенности решения;
- Невозможно выбрать ветвь функции ω, непрерывную при переходе через все границы “ласточкиного хвоста”.

В диссертации доказано следующее утверждение, определяющее максимальную ширину полосы определения решения без особенностей граничных эквидистант:

Лемма 1. *Пусть γ является гладкой кривой на сфере $|\mathbf{x}| = R$. Эквидистанты $\gamma^{\pm}(\delta)$ не имеют особенностей типа “ласточкин хвост” в случае выполнения следующего неравенства*

$$\operatorname{tg} \delta < \min_{\mathbf{x} \in \gamma} R / k_g(\mathbf{x}),$$

где k_g — геодезический радиус кривизны кривой γ.

На рисунке 2 приведены возможные картины стационарного течения из сферического источника, определяемого вихрем Овсянникова. Кривыми на сфере обозначена полоса определения начальных данных, из которой происходит истечение проводящего газа.

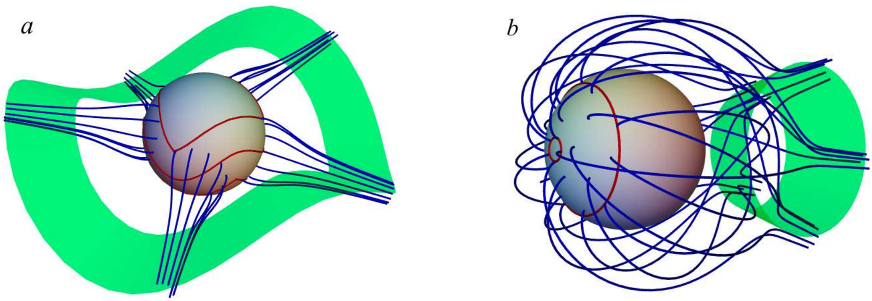

Рис. 2.

Кривые вне сферы иллюстрируют магнитные силовые линии течения, которые в стационарном случае совпадают с линиями тока. На бесконечности все силовые линии магнитного поля приближаются к некоторой поверхности, схематически отмеченной на рисунке.

Аналогичными свойствами обладает плоский вихрь Овсянникова, построенный на группе движений плоскости $\{X_2, X_3, X_7\}$. Все описанные выше свойства сохраняются, однако поверхностями уровня решения являются не сферы, а плоскости $x = x_0$. Построены и исследованы отдельные подмодели плоского и сферического вихрей Овсянникова: стационарная, автомодельная, решения с линейным по части переменных полем скорости. В частности, показано, что в стационарном вихре Овсянникова поле скорости всегда коллинеарно магнитному полю; построение решения сведено к одному обыкновенному дифференциальному уравнению, не разрешенному относительно производной.

Проведенные исследования указывают на существование класса решений, обобщающего классические одномерные движения идеальной сплошной среды с плоскими и сферическими волнами и обладающего следующими свойствами:

1. Трехмерное пространство событий локально расслоено поверхностями уровня некоторой функции $h(x, y, z) = \mathrm{const}$.

2. В разложении вектора скорости частиц на касательную и нормальную компоненты к поверхностям уровня $\mathbf{u} = \mathbf{u}_n + \mathbf{u}_\tau$,

абсолютные значения компонент вектора скорости, а также термодинамические функции постоянны вдоль каждой поверхности уровня, т.е. функции $|\mathbf{u}_n|$, $|\mathbf{u}_\tau|$, p, ρ зависят только от t и h.

3. Траектории частиц являются плоскими кривыми.

В имеющихся подмоделях $h = x$, либо $h = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (плоский и сферический вихри Овсянникова). В диссертации исследован вопрос о возможности обобщения этих примеров на аналогичные решения уравнений газовой динамики с другими функциями h.

Для этого получены уравнения, задающие всевозможные движения газа с плоскими траекториями частиц. В полученных уравнениях выделяется класс решений, удовлетворяющих свойствам 1, 2 с неопределенной функцией h. Доказано, что такой класс решений существует если *а*) функция h удовлетворяет уравнению эйконала $|\nabla h| = 1$, и *б*) матрица Гессе (матрица вторых производных функции h) имеет алгебраические инварианты, зависящие только от h. Вычисления показывают, что этим двум условиям удовлетворяют только функции, поверхностями уровня которых являются параллельные плоскости, соосные круговые цилиндры или сферы с фиксированным центром. Первый и последний случаи сводятся к плоскому и сферическому вихрям Овсянникова. Для движений с цилиндрическими поверхностями уровня инвариантных функций оказывается возможным два типа движений в направлениях, соответствующих главным сечениям цилиндра: вектор скорости частиц лежит либо в плоскости, проходящей через ось цилиндра, либо в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. Оба случая также являются хорошо известными в литературе. Таким образом, в естественном классе функций, удовлетворяющих уравнению эйконала, обобщения вихря Овсянникова не существует.

Отметим, что несмотря на сложившееся название, вихрь Овсянникова может быть и безвихревым; это означает, что векторное поле, удовлетворяющее условию частичной инвариантности относительно группы вращений, может иметь нулевой ротор. А именно, справедлива

Теорема 5. *Безвихревое векторное поле, частично инвариантное относительно группы вращений $O(3)$, представляется в сферической системе координат в виде*

$$u_r = U(r), \quad u_\theta = \alpha r^{-1}\cos\omega, \quad u_\varphi = \alpha r^{-1}\sin\omega.$$

Здесь $U(r)$ и α — произвольные функция и постоянная. Функция $\omega(\theta,\varphi)$ задается неявно уравнением

$$\eta = f(\zeta); \quad \textit{где} \quad \eta = \sin\theta\sin\omega, \quad \zeta = \varphi + \pi/2 + \mathrm{arctg}(\cos\theta\,\mathrm{tg}\,\omega)$$

с произвольной гладкой функцией f.

В третьей главе диссертации дан геометрический алгоритм построения векторных полей, определяемых теоремой 5. Показано, что безвихревое поле типа вихря Овсянникова не может быть реализовано как поле скоростей движения сплошной среды, удовлетворяющее закону сохранения массы, т.е. применение термина «особый вихрь» или «вихрь Овсянникова», применяемый для точных $SO(3)$-частично инвариантных решений уравнений механики сплошной среды, является оправданным.

Четвертая глава диссертации посвящена описанию стационарных течений несжимаемой ($\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$) бесконечно проводящей жидкости с постоянным полным давлением. Для удобства вводятся переменные Эльзассера

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}\sqrt{\rho(\mathbf{x})} - \mathbf{B}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{u}\sqrt{\rho(\mathbf{x})} + \mathbf{B}, \quad P = p + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2.$$

В них уравнения магнитной гидродинамики имеют более симметричный вид. Уравнение индукции, выражающее коммутативность векторных полей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, позволяет ввести криволинейную систему координат $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{k})$ такую, что k^1- и k^2-координатные линии совпадают с интегральными кривыми векторных полей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial k^1}, \quad \mathbf{b} = \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial k^2}.$$

В новой системе координат уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial k^1} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial k^1 \partial k^2} + \frac{\partial P}{\partial k^1} = 0, \\
&\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial k^2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial k^1 \partial k^2} + \frac{\partial P}{\partial k^2} = 0, \qquad \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{k}}\right) = 1. \\
&\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial k^3} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial k^1 \partial k^2} + \frac{\partial P}{\partial k^3} = 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

Данная форма уравнений магнитной гидродинамики удобна, поскольку каждое решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{k})$, $P = P(\mathbf{k})$ определяет явным образом линии тока, магнитные силовые линии, а также контактные магнитные поверхности течения жидкости. Решения системы уравнений (5) с постоянным полным давлением $P = \text{const}$ записываются в виде

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\sigma}(k^1, k^3) + \boldsymbol{\tau}(k^2, k^3), \tag{6}$$

где векторы $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\tau}$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial k^1} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial k^2} \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial k^3} + \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial k^3}\right)\right) = 1. \tag{7}$$

Разделение переменных в уравнении (7) и его интегрирование позволяет в явном виде описать течения несжимаемой плазмы с постоянным полным давлением. Отметим, что данный класс решений обладает значительным функциональным произволом. Контактные магнитные поверхности $k^3 = c$ на решениях, определяемых зависимостью (6), являются поверхностями переноса, т.е. заметаются кривой $\mathbf{x} = \boldsymbol{\sigma}(k^1, c)$ при параллельном переносе вдоль кривой $\mathbf{x} = \boldsymbol{\tau}(k^2, c)$.

Пример 2. Рассмотрим следующее решение системы (5) вида (6):

$$\mathbf{x} = \Big(k^1 + F\big(\tau^3(k^2, k^3)\big)\Big)\mathbf{e}_1 + \Big(\beta(k^1) + \tau^2(k^2, k^3)\Big)\mathbf{e}_2 + \tau^3(k^2, k^3)\,\mathbf{e}_3,$$

$$\frac{\partial \tau^2}{\partial k^2}\frac{\partial \tau^3}{\partial k^3} - \frac{\partial \tau^2}{\partial k^3}\frac{\partial \tau^3}{\partial k^2} = 1. \tag{8}$$

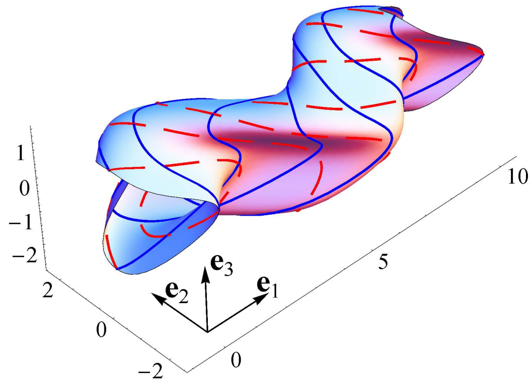

Рис. 3.

Здесь β, F и G — произвольные функции своих аргументов; $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — ортонормированная тройка постоянных векторов. На рисунке 3 изображена магнитная поверхность $k^3 = 1$ на решении (8) с $\beta = \sin k^1$, $\tau^2 = \sqrt{2k^3}\sin k^2$, $\tau^3 = \sqrt{2k^3}\cos k^2$, $F = \cos 2\tau^3$. Непрерывными и пунктирными кривыми показаны магнитные силовые линии и линии тока течения соответственно.

Вторая часть диссертации посвящена построению и использованию базисов дифференциальных инвариантов для бесконечномерных групп, допускаемых основными моделями гидродинамики. Отметим, что бесконечномерными группами симметрий обладают многие математические модели: уравнения Навье — Стокса и Эйлера для несжимаемой жидкости, уравнения стационарной газовой динамики и другие. В то время, как общая теория конечномерных групп и алгебр Ли хорошо развита, аналогичная теория бесконечномерных групп и алгебр Ли в настоящий момент не построена. Нуждаются в осмыслении вопросы классификации бесконечномерных групп и алгебр Ли, в частности, построения оптимальных систем подгрупп произвольной размерности.

Большую информацию о группе преобразований дают ее инварианты. Для групп симметрий дифференциальных уравнений наибольший интерес представляют дифференциальные инварианты, т.е. инварианты, зависящие от производных. При рассмотрении продолжений действия группы на производные сколь угодно высокого порядка возникает бесконечное множество дифференциальных инвариантов, обладающее вполне определенной структурой. Основной в теории дифференциальных инвариантов является теорема о базисе, утверждающая существование конечного набора дифференциальных инвариантов, из которого каждый инвариант получается путем применения операторов инвариантного дифференцирования и функциональных операций. Каждая группа Ли (конечно- или бесконечномерная) полностью характеризуется своим набором операторов инвариантного дифференцирования и базисом дифференциальных инвариантов.

В *пятой главе* диссертации вычислены базисы дифференциальных инвариантов и операторы инвариантного дифференцирования для групп Ли, допускаемых уравнениями Навье — Стокса и Эйлера в общем и вращательно-симметричном случаях, уравнениями стационарной газовой динамики, уравнением Кармана — Гудерлея для околозвуковых течений газа.

Уравнения Навье — Стокса для вращательно-симметричных движений вязкой жидкости, записанные в цилиндрических координатах (r, θ, z) в терминах функции тока ψ и функции $w = r u_\theta$, допускают группу точечных преобразований, порождаемую следующими операторами (Л.В. Капитанский, 1979):

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_t, \quad X_2 = 2t\partial_t + r\partial_r + z\partial_z + \psi\partial_\psi \\ X_3(\tau) = \tau(t)\partial_z - \frac{1}{2}\, r^2\, \dot{\tau}(t)\partial_\psi, \quad X_4(\sigma) = \sigma(t)\partial_\psi. \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь $\tau(t)$ и $\sigma(t)$ — произвольные гладкие функции времени. Справедлива следующая

Теорема 6. *Операторы инвариантного дифференцирования для группы* (9) *следующие:*

$$\delta_1 = r^2\, D_t - r\, \psi_r\, D_z, \quad \delta_2 = r\, D_r, \quad \delta_3 = r\, D_z.$$

Базис дифференциальных инвариантов состоит из трех инвариантов

$$w, \quad \psi_z, \quad r\, \psi_{rr} - \psi_r.$$

Здесь и далее через D_i обозначается оператор полного дифференцирования по переменной i.

Уравнения Навье — Стокса для общих пространственных движений вязкой жидкости

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \nu\triangle\mathbf{u}, \;\; \operatorname{div}\mathbf{u} = 0$$

допускают бесконечномерную группу преобразований. Ее конечномерная часть порождается переносом по времени, вращениями вокруг трех осей и растяжением. Бесконечномерной части допускаемой группы соответствует алгебра Ли операторов

$$Y_i(\varphi_i(t)) = \varphi_i\partial_{x^i} + \dot{\varphi}_i\partial_{u^i} - x^i\ddot{\varphi}_i\partial_p, \; (i = 1, 2, 3); \;\; Z = \sigma(t)\partial_p \qquad (10)$$

(по i суммирования нет). Функции $\varphi_i(t)$ и $\sigma(t)$ произвольны.

Теорема 7. *Операторы инвариантного дифференцирования для группы Ли, порождаемой операторами* (10)*, имеют вид*

$$\delta_0 = D_t + uD_x + vD_y + wD_z, \;\; \delta_1 = D_x, \;\; \delta_2 = D_y, \;\; \delta_3 = D_z.$$

Базис дифференциальных инвариантов следующий:

$$t, \;\; \nabla u, \;\; \nabla v, \;\; \nabla w, \;\; \mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p.$$

Отметим, что этот же результат справедлив и для уравнений Эйлера, описывающих движение идеальной жидкости ($\nu = 0$).

Далее рассматриваются уравнения, описывающие трехмерные стационарные движения невязкого нетеплопроводного газа

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \rho^{-1}\nabla p = 0, \quad (\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho + \rho\,\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{u}\cdot\nabla)S = 0. \quad (11)$$

Предполагается, что уравнение состояния газа имеет разделенный вид: $\rho = Sg(p)$. Уравнения (11) помимо конечномерной группы допускают бесконечномерное преобразование Мунка — Прима (1947):

$$X = -m(\mathbf{x})\,\mathbf{u}\,\partial_{\mathbf{u}} + 2m(\mathbf{x})\,\rho\,\partial_\rho + 2m(\mathbf{x})\,S\,\partial_S, \quad \mathbf{u}\cdot\nabla m(\mathbf{x}) = 0. \quad (12)$$

Справедлива следующая

Теорема 8. *Операторы инвариантного дифференцирования для преобразования* (12) *совпадают с полными производными по независимым переменным*

$$\delta_1 = D_x, \;\; \delta_2 = D_y, \;\; \delta_3 = D_z.$$

Базис дифференциальных инвариантов преобразования (12) *может быть выбран в виде*

$$x, \;\; y, \;\; z, \;\; \mathbf{u}\sqrt{\rho}, \;\; \frac{S}{\rho}, \;\; \frac{(\mathbf{u}\cdot\nabla)\rho}{\sqrt{\rho}}.$$

Одной из распространенных моделей, используемых при описании околозвуковых течений газа является уравнение Кармана—Гудерлея

$$-\varphi_x\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0. \tag{13}$$

Функция $\varphi(x, y, z)$ задает потенциал малых возмущений потока газа, движущегося равномерно с критической скоростью вдоль оси Ox. Прямым вычислением показано, что уравнение (13) допускает бесконечномерную алгебру преобразований L_∞. Ее конечная часть L_6 порождается следующими операторами:

$$\begin{gathered} Y_1 = \partial_x, \;\; Y_2 = \partial_y, \;\; Y_3 = \partial_z, \;\; Y_4 = z\partial_y - y\partial_z, \\ Y_5 = y\partial_y + z\partial_z - 2\varphi\partial_\varphi, \;\; Y_6 = x\partial_x + 3\varphi\partial_\varphi. \end{gathered} \tag{14}$$

Бесконечномерной части допускаемой алгебры соответствует оператор

$$X_\infty = f(y, z)\partial_\varphi, \;\; \triangle f(y, z) = 0. \tag{15}$$

Никаких нетривиальных контактных преобразований, допускаемых уравнением (13), нет.

Теорема 9. *Базис дифференциальных инвариантов для преобразования, порождаемого оператором* X_∞, *может быть выбран следующим образом:*

$$x, \;\; y, \;\; z, \;\; \varphi_x, \;\; \varphi_{yy} + \varphi_{zz}. \tag{16}$$

Операторами инвариантного дифференцирования являются полные производные по независимым переменным x, y, z.

Глава шесть диссертации описывает приложения дифференциальных инвариантов для построения группового расслоения уравнений и конструирования их дифференциально инвариантных решений.

Задача о построении группового расслоения заданной системы уравнений была впервые поставлена С. Ли. Известно, что группа G, допускаемая некоторой системой уравнений E, переводит любое решение U: $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ в решение этой же системы. Таким образом, на множестве всех решений системы E появляется отношение эквивалентности: два решения U и U' эквивалентны, если они связаны преобразованием группы G: $U' = T\,U$, $T \in G$. Каждый класс эквивалентности описывается орбитой одного из решений под действием всевозможных преобразований группы G. Задача группового расслоения формулируется следующим образом: для заданной системы уравнений E и заданной группы G, допускаемой системой E, требуется построить систему уравнений, описывающую орбиту любого решения (система AG) и систему, задающую совокупность всех орбит различных решений (система RE). Система AG называется *автоморфной* и обладает тем свойством, что любое ее решение лежит на орбите любого фиксированного решения, т.е. получается из него действием преобразований группы G. Напротив, *разрешающая* система RE не допускает исходной группы и, таким образом, различает орбиты разных решений. В настоящее время имеется крайне мало примеров построения группового расслоения, особенно для систем дифференциальных уравнений.

Теорема 10. *Групповое расслоение стационарных уравнений газовой динамики* (11) *по преобразованию Мунка – Прима* (12) *состоит из разрешающей системы*

$$(\mathbf{w}\cdot\nabla)\,\mathbf{w} + \nabla F(\sigma) = 0, \quad \operatorname{div}(\sigma^{-2}\mathbf{w}) = 0 \tag{17}$$

и автоморфной системы

$$\mathbf{u} = S^{-1/2}\mathbf{w}, \quad S = \rho\sigma^2, \quad R = -2\frac{(\mathbf{w}\cdot\nabla)\sigma}{\sigma^2}, \quad D\rho = \rho^{1/2}\,R. \tag{18}$$

Для любого решения разрешающей системы (17) *исходные газоди-*

намические функции восстанавливаются подстановкой в конечные соотношения (18) *и интегрированием уравнения для* ρ.

Теорема 11. *Групповое расслоение уравнения* (13) *относительно бесконечномерной группы* (15) *состоит из автоморфной системы*

$$\begin{aligned} &\varphi_x = a, \\ &\varphi_{yy} + \varphi_{zz} = a\, a_x \end{aligned} \tag{19}$$

и разрешающего уравнения для функции $a(x, y, z)$*:*

$$-a a_{xx} - a_x^2 + a_{yy} + a_{zz} = 0. \tag{20}$$

Построение группового расслоения сводит задачу интегрирования исходной системы уравнений к исследованию разрешающей подсистемы. Последняя допускает лишь конечномерную группу преобразований, что позволяет систематически исследовать ее точные решения на основе алгоритмов группового анализа.

В диссертации также построено групповое расслоение относительно бесконечномерной части допускаемой группы для уравнений Эйлера во вращательно-симметричном случае. Получившаяся при этом достаточно громоздкая разрешающая система уравнений приведена в [6].

Третья часть диссертации освещает приложения развитых выше методов для построения и анализа точных решений уравнений газовой динамики. В *седьмой главе* дается исчерпывающая классификация инвариантных решений уравнения Крамана — Гудерлея. Вычисление группы касательных преобразований, допускаемых уравнением (20) показало, что оно допускает лишь конечномерную группу с алгеброй Ли L_6, изоморфной алгебре (14).

Конечномерность алгебры L_6 позволила построить ее оптимальную систему подалгебр ΘL_6, содержащую 63 представителя и дать полное описание инвариантно-групповых решений уравнения (20). Далее для известной функции $a(x, y, z)$ исходная функция φ восстанавливалась интегрированием инволютивной системы (19). Полный перечень содержит 19 подмоделей, сводящихся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, и 10 подмоделей с двумя независимыми переменными. Кроме того, построена частично инвариантная подмодель, задающая решения типа двойной волны.

В тех инвариантных подмоделях, где независимая переменная линейно зависит от полярного угла цилиндрической системы координат, дан ответ на вопрос о существовании периодических решений, обеспечивающих непрерывность искомой функции во всем пространстве. Показано, что в тех подмоделях, где непрерывных решений не существует, можно построить решение, содержащее ударную волну в виде винтовой поверхности.

Пример 3. В качестве примера рассмотрим решение, порожденное подалгеброй $\{\alpha Y_1 + Y_4, Y_1 + Y_5\}$ (α — произвольный параметр). Представление решения уравнения (13) имеет вид

$$\varphi = r^{-2} B(\lambda), \quad \lambda = x - \alpha\theta - \ln r.$$

В терминах функции $p(B) = B'(\lambda)$ уравнение подмодели записывается в виде

$$\frac{dB}{dp} = -\frac{(1+\alpha^2 - p)p}{4(p+B)}. \tag{21}$$

Исследование особых точек уравнения (21) показало отсутствие замкнутых интегральных кривых, соответствующих периодическим решениям (см. рис 4). Условия на инвариантной ударной волне, имеющей форму $\lambda = \mathrm{const}$, имеют следующий вид:

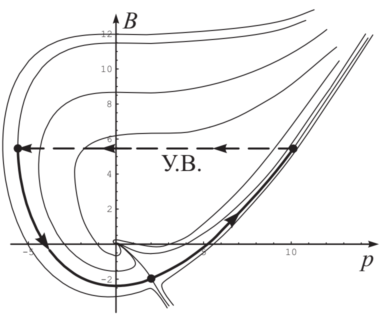

Рис. 4.

$$\frac{p_1 + p_2}{2} = 1 + \alpha^2, \quad [B] = 0, \quad [p] < 0. \tag{22}$$

Решению с ударной волной на рис. 4 соответствует интегральная кривая, на которой имеется две точки (p_1, B_1) и (p_2, B_2), связанные зависимостями (22). Единственной такой интегральной кривой является сепаратриса седловой особой точки. На рис. 4 она показана жирной линией. Стрелками обозначено направление возрастания параметра λ вдоль этой кривой. Пунктирной линией показан ударно-волновой переход, отвечающий условиям (22). Численным счетом доказано существование периодического по времени решения, отвечающего условию непрерывности во всем пространстве.

В *восьмой главе* рассматриваются эволюционные подмодели с двумя независимыми переменными для уравнений газовой динамики. Все подмодели этого типа могут быть записаны в следующем каноническом виде:

$$U_t + UU_\lambda + b(t)\rho^{-1}p_\lambda = a_1,\ V_t + UV_\lambda = a_2,\ W_t + UW_\lambda = a_3,$$
$$\rho_t + U\rho_\lambda + \rho U_\lambda = \rho a_4,\ p_t + Up_\lambda + A(p,\rho)U_\lambda = A(p,\rho)a_4. \tag{23}$$

Здесь $\mathbf{U} = (U, V, W)$ — инвариантный вектор скорости; t, λ — инвариантные независимые переменные. Правые части $a_1, \ldots, a_4$ зависят от t, λ и $\mathbf{U}$. Величины λ, $\mathbf{U}$, а также правые части уравнений в каждой подмодели имеют свои выражения в терминах исходных зависимых и независимых переменных (Е.В. Мамонтов, 1999). Всего имеется 9 подмоделей данного типа.

В диссертации полностью описан класс решений подмоделей (23), в которых U линейно зависит от переменной λ. Конструктивное описание этого класса решений возможно при выборе уравнения состояния политропного газа.

Введение лагранжевых координат и частичное интегрирование системы уравнений (23) с учетом требования линейной зависимости $U(\lambda)$ сводит построение решения к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения типа Эмдена — Фаулера. Качественное исследование множества интегральных кривых данного уравнения позволило сделать вывод о характеристиках описываемых течений газа. Полученные решения описывают как непрерывный разлет, так и неограниченное сжатие газа за конечный или бесконечный интервал времени. Вектор скорости линейно зависит от части пространственных координат. Решения содержат произвол в три функции одного переменного. Подмодели естественным образом разделяются на два типа. Первый описывает сжатие или разлет плоского слоя газа. Траектории частиц являются плоскими кривыми, наклон и положение плоскости в пространстве определяется начальным положением частицы. В движениях с коллапсом плотности прообразом точки на плоскости коллапса является некоторая пространственная кривая, начальную конфигурацию которой можно выбирать достаточно свободно в силу имеющегося произвола в решении. Второй тип решений описывает разлет или сжатие газа, заполняющего цилиндр, радиус которого меняется с ростом времени. Двигаясь вдоль оси цилиндра, частицы совершают конечное или бесконечное количество витков вокруг нее. В движениях с коллапсом плотности цилиндр сжимается в прямую. Показано существование колебательных режимов движения газа.

Пример 4. В качестве примера приведем решение, описывающее вращательное движение газа. Представление решения в цилиндрической системе координат имеет вид (x, r, θ):

$$u_c = V(t,\lambda) + x/t, \;\; v_c = U(t,\lambda), \;\; w_c = W(t,\lambda), \;\; \lambda = r.$$

Здесь u_c, v_c, w_c — осевая, радиальная и окружная компоненты вектора скорости. В этой подмодели $b = 1$, $a_1 = W^2/\lambda$, $a_2 = -V/t$, $a_3 = -UW/\lambda$, $a_4 = -(U/\lambda + 1/t)$. Интегрируя уравнения подмодели находим

$$V = \frac{V_0(\xi)}{t}, \;\; W = \frac{W_0(\xi)}{M(t)}, \;\; \rho = \frac{f(\xi)}{M^2 t}, \;\; p = \frac{P(\xi)}{M^{2\gamma} t^{\gamma}}, \;\; \xi = \frac{\lambda}{M(t)}. \tag{24}$$

Функции V_0, W_0, f, P произвольны. При определении функции $M(t)$ возможно два случая. При $\gamma = 3/2$ функция M определяется явно: $M = \alpha\sqrt{t}$. При этом имеется ограничение на произвольные функции: $W_0^2(\xi) = \alpha\xi P'(\xi)/f(\xi) - \alpha^4\xi^2/4$. В случае произвольного γ функция M удовлетворяет уравнению

$$\ddot{M} M^3 + \alpha t^{1-\gamma} M^{4-2\gamma} = \beta^2; \;\; \alpha, \beta = \text{const}. \tag{25}$$

Кроме того, $P'(\xi) = \alpha\xi f(\xi)$, $W_0 = \beta\xi$. Траектории частиц с $t_0 = 1$ определяются формулами

$$x = \big(x_0 + V_0(r_0)\big)t - V_0(r_0), \; r = r_0 M(t), \; \theta = \theta_0 + \frac{W_0(r_0)}{r_0}\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{M(s)^2}.$$

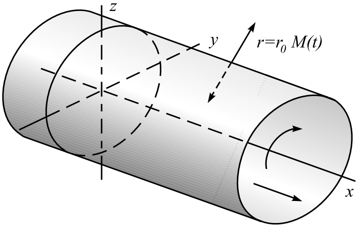

Рис. 5.

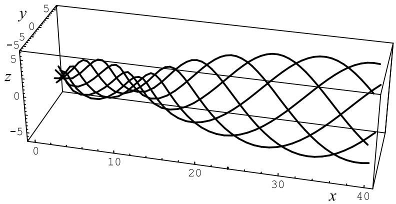

Рис. 6.

Вдоль траектории осевая координата x линейно зависит от времени t. Следовательно, траекторию каждой частицы можно параметризовать координатой x вместо t. Тогда закон изменения радиальной координаты частицы задает в пространстве (x, r, θ) поверхность вращения с образующей $M(x)$. Траектория частицы является спиралью, намотанной на эту поверхность в соответствии с законом изменения θ. Отметим, что если $M(t_*) = 0$ при некотором t_*, то в случае такого движения все частицы в момент времени t_* приходят на ось Ox.

Для описания движения частиц газа в совокупности рассмотрим газ, заключенный внутри цилиндра $r_p = r_0 M(t)$ (см. рис. 5). Давление на поверхности цилиндра одинаково во всех точках и определяется формулами (24), где $P(\xi) = P(r_0) = \text{const}$. Если функция $M(t)$ возрастает, то происходит разрежение газа, при $M(t) \to 0$, напротив, газовый цилиндр сжимается и превращается в прямую, а плотность и давление возрастают до бесконечности. Частицы газа движутся вдоль оси цилиндра и вращаются вокруг нее (рис. 6). При этом они совершают конечное число оборотов вокруг оси, если интеграл $\int M^{-2} dt$ сходится, и бесконечное число оборотов в противном случае.

Функция $V_0(\xi)$ задает прообраз точки на многообразии коллапса. Прообразом точки $x = x_*$ при $t = t_*$ $(M(t_*) = 0)$ является поверхность вращения

$$x = t_*^{-1}(x_* + (1 - t_*)V_0(r)), \quad 0 \le r < +\infty.$$

Функциональный произвол в решении позволяет получать различные картины движения, соответствующие трехмерным нестационарным режимам движения газа.

Каждый раздел диссертации завершается перечнем основных результатов.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Головин С.В. *Точные решения для эволюционных подмоделей газовой динамики* // ПМТФ, 2002. Т. 43, №4. С. 3–14.

[2] Головин С.В. *Групповое расслоение и точные решения уравнения трансзвукового движения газа* // ПМТФ, 2003. Т. 44, №3. С. 51–63.

[3] Golovin S.V. *Irrotational barochronous gas motions* // Nonlinear Dynamics, 2004. V. 36. No. 1. Pp. 19–28.

[4] Головин С.В. *Нестационарное движение газа в полосе* // ПМТФ, 2004. Т. 45, №2. С. 90–98.

[5] Golovin S.V. *Applications of the differential invariants of infinite dimensional groups in hydrodynamics* // Comm. in Nonlin. Sci. and Num. Simul., 2004. V. 9, No. 1. Pp. 35–51.

[6] Golovin S.V. *Group foliation of Euler equations in nonstationary rotationally symmetrical case* // Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics / Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2004. V. 50, No 1. Pp. 110–117.

[7] Golovin S.V. *Singular vortex in magnetohydrodynamics* // J. Phys. A: Math. Gen., 2005. V. 38, No. 20. Pp. 4501–4516.

[8] Golovin S.V. *Invariant solutions of the singular vortex in magnetohydrodynamics* // J. Phys. A: Math. Gen., 2005. V. 38, No. 37. Pp. 8169–8184.

[9] Golovin S.V. *Generalization of the one-dimensional ideal plasma flow with spherical waves* // J. Phys. A: Math. Gen., 2006. V. 39. Pp. 7579–7595.

[10] Golovin S.V. *Partially invariant solutions to ideal magnetohydrodynamics* // IMA Volumes in Mathematics and its Applications. V. 144: Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations. Springer, New York 2007, Pp. 367–382.

[11] Головин С.В. *Плоский вихрь Овсянникова. Уравнения подмодели* // ПМТФ, 2008. Т. 49, №5. С. 27–40.

[12] Головин С.В. *Плоский вихрь Овсянникова. Свойства описываемого движения и точные решения* // ПМТФ, 2008. Т. 49, №6. С. 55–68.

[13] Головин С.В. *Безвихревые векторные поля, частично инвариантные относительно группы вращений* // ПММ, 2008. Т. 72, № 6. С. 734-–740

[14] Golovin S.V. *On the hierarchy of partially invariant submodels* // J. Phys. A: Math. Theor., 2008. V. 41, 265501.

[15] Головин С.В. *Регулярные частично инвариантные решения дефекта 1 уравнений идеальной магнитогидродинамики* // ПМТФ, 2009. Т. 50, № 2. С. 5–15.

Изд. лиц. ПД № 12-0143 от 22.10.2001. Подписано в печать __.__.2009. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2. Тираж 150 экз. Бесплатно. Заказ № ___.

Лицензия ПД № 12-0143 от 22.10.2001.

Оригинал-макет подготовлен и отпечатан
в Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева.
630090 Новосибирск, просп. акад. Лаврентьева, 15.