На правах рукописи

Пашинин Юрий Юрьевич

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ БЕСКОНЕЧНОГО ПЛОСКОГО КЛИНА

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск, 2007

Работа выполнена в Новосибирском государственном университете.

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ	
Ткачев Дмитрий Леонидович	– доктор физико-математических наук, профессор
ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:	
Селезнев Вадим Александрович	– доктор физико-математических наук, профессор
Мамонтов Евгений Владимирович	– кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	– Новосибирский государственный педагогический университет

Защита состоится "___"ноября 2007 г. в ___ часов
на заседании диссертационного совета Д 212.174.02 в Новосибирском государственном университете по адресу: 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного университета.

Автореферат разослан "___"октября 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного совета, доктор физико-математических наук — Н.И. Макаренко

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В современной аэродинамике существует класс важных задач, связанных с изучением стационарных сверхзвуковых течений газа около конических тел, а так же тел, контуры которых содержат угловые точки. Такие задачи решаются численно в основном методом установления и локально часто сводимы к задаче стационарного обтекания бесконечного плоского клина сверхзвуковым потоком газа. Однако задача обтекания клина допускает, вообще говоря, два различного типа решений. Первый тип – это течение с сильной ударной волной – случай, когда скорость потока газа за фронтом ударной волны становиться меньше скорости звука ($u_0^2 + v_0^2 < c_0^2$, здесь u_0, v_0 – компоненты вектора скорости потока за фронтом ударной волны, c_0 – скорость звука). Второй тип – течение со слабой ударной волной. В этом случае скорость потока за фронтом остается сверхзвуковой ($u_0^2+v_0^2 > c_0^2$). Кроме того, в набегающем потоке $U_\infty > c_\infty$, где c_∞ – скорость звука. Вопрос о реализации того или иного типа течения до сих пор оставался открытым, поэтому, вообще говоря использование метода установления при численном моделировании нельзя было считать достаточно обоснованным. Один из возможных путей решения данного вопроса заключается в исследовании устойчивости по отношению к малым возмущениям этих стационарных режимов течения газа, то есть в изучении асимптотики решения линейной смешанной задачи на малые возмущения начальных данных (см. задачу (1)–(4) ниже) при $t \to \infty$.

В случае, когда малые возмущения зависят (кроме времени t) только от одной переменной, в ряде работ было строго показано, что режим течения газа со слабой ударной волной устойчив по отношению к малым возмущениям, а режим течения газа с сильной ударной волной неустойчив.

В общем случае доказано, что основное решение, соответствующее сверхзвуковому обтеканию клина со слабой ударной волной, при условии, что течение газа после ударной волны сверхзвуковое, а также

$$M_1(\theta) > 1$$

при

$$\sigma \le \theta \le \Theta,$$

устойчиво по отношению к малым возмущениям. Здесь

$$M_1(\theta) = \frac{u_0 \cos\theta + v_0 \sin\theta}{c_0}.$$

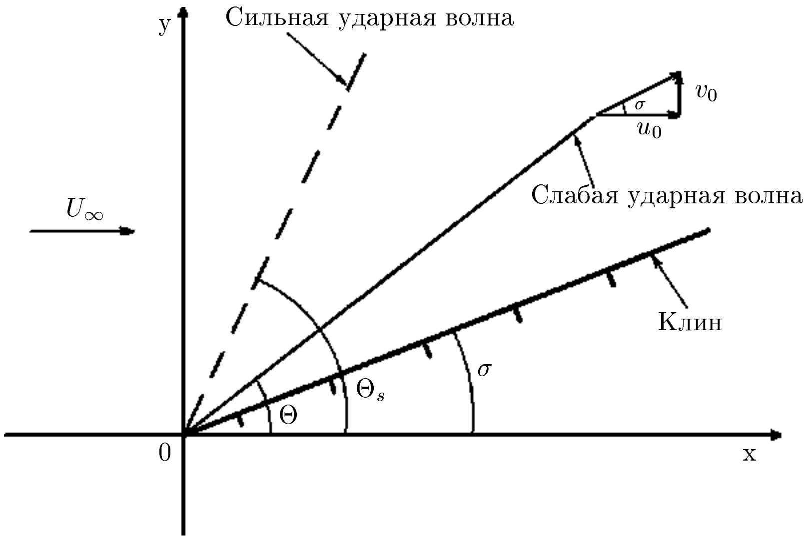

Рис. 1.

В то же время установлено, что линейная смешанная задача (см. задачу (1)–(4) ниже) корректна при

$$u_0^2 + v_0^2 < c_0^2$$

для случая малых углов клина σ (см. рис. 1). Однако устойчивость таких режимов обтекания до сих пор не была доказана.

Надо также отметить, что в ряде работ устанавливается факт отсутствия стационарного режима с сильной ударной волной для заостренных тел конечной толщины с помощью рассуждений, проведенных на качественном уровне. Все эти результаты позволили сформулировать широко используемую на сегодняшний день гипотезу о неустойчивости сильной ударной волны в задаче о стационарном сверхзвуковом обтекании бесконечного плоского клина. Однако, вплоть до настоящего времени эта гипотеза не получила аналитического обоснования.

Настоящая работа посвящена исследованию в общем случае устойчивости режима течения газа с сильной ударной волной и является важным шагом на пути к проверке существующей гипотезы об устойчивости слабой ударной волны и неустойчивости сильной ударной волны. При этом проводятся дополнительные исследования, посвященные установлению корректности в общем случае задачи (1)–(4).

Основные цели работы.

- Изучение асимптотики при $t \to \infty$ решения линейной смешанной задачи на малые возмущения начальных данных.

- Установление необходимых и достаточных условий устойчивости и неустойчивости сильной ударной волны в задаче обтекания клина на линейном уровне.

- Изучение линейной смешанной задачи на малые возмущения начальных данных на предмет корректности ее постановки в общем случае произвольных допустимых углов клина.

Научная новизна и практическая ценность. Работа посвящена изучению вопроса о устойчивости сильной ударной волны в задаче обтекания бесконечного плоского клина сверхзвуковым потоком газа. Рассматривается линеаризованная задача на малые возмущения начальных данных исходной газодинамической задачи. Она сводится к смешанной задаче для волнового уравнения в октанте $t, x, y > 0$ в случае, когда краевое условие на грани $x = 0$ задается линейным дифференциальным оператором второго порядка с постоянными коэффициентами, краевое условие на грани $y = 0$ задается линейным дифференциальным оператором первого порядка с постоянными коэффициентами и при $t = 0$ определены данные Коши. Для обобщенной постановки, в случае когда выполнены условия Лопатинского после преобразования Лапласа по t и Фурье по x, y формулируются краевые задачи для отыскания следов решения на гранях $x = 0$ и $y = 0$. Краевая задача для функции $u(0, y, t)$ сводится к задаче сопряжения Римана и решается с использованием условий на гладкость искомого решения. Найдено представление решения u обобщенной задачи в двойственных переменных, при условии, что $u \in H_{2,s_0}(R^3_+)$ (пространство $H_{2,s_0}(R^3_+)$ определено в главе 1). Доказана теорема существования и единственности такого решения. Найдено представление функции $u(x, 0, t)$ в явном виде, определена асимптотика ее поведения при $t \to \infty$. Отдельно рассмотрены случай финитных и не финитных начальных данных. Установлены условия устойчивости и неустойчивости по отношению к малым возмущениям начальных данных решения исходной газодинамической задачи на линейном уровне.

Практическая значимость работы определяется возможностью непосредственного применения ее результатов при численном решении широкого круга газодинамических задач с использованием метода установления.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации, докладывались и обсуждались на Международных конференциях молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Красноярск, 2003 г., Новосибирск 2004 г., Кемерово 2005 г., Красноярск 2006 г.), XL Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс"(Новосибирск, 2002 г.), на семинаре кафедры дифференциальных уравнений Новосибирского государственного университета "Теоретические и вычислительные проблемы задач математической физики".

Публикации. Основные результаты опубликованы в 9 работах, список которых помещен в конце автореферата. В работах [1]-[8] А.М. Блохину принадлежит постановка задачи. Д.Л. Ткачевым доказана теорема устойчивости сильной ударной волны в случае финитных начальных данных для малых углов клина. Ю.Ю. Пашинину принадлежит основной результат о устойчивости сильной ударной волны в случае финитных начальных данных и неустойчивости в случае нефинитных начальных данных для произвольных допустимых углов клина. В работе [9] Д.Л. Ткачеву принадлежит постановка задачи. Основной результат, разрешающий задачу о трихотомии спектра полинома степени n относительно единичной окружности принадлежит Ю.Ю. Пашинину.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, содержащих 6 параграфов, заключения и списка литературы из 34 наименований. Объём работы – 86 машинописных страниц.

Краткое содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сделан обзор литературы по изучаемым в диссертации вопросам, представлено краткое содержание диссертации по главам, приведён перечень положений выносимых на защиту.

В **первой главе** приводится формулировка линеаризованной задачи на малые возмущения начальных данных исходной газодинамической проблемы: в области $t, x > 0, y > x\ tg\sigma$ требуется найти решение системы уравнений акустики

$$AU_t + BU_x + C_\sigma U_y = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее граничным условиям на ударной волне ($x = 0$) и на поверхности клина ($y = x\ tg\sigma$):

$$u_1 + du_3 = 0,\ u_3 + u_4 = 0,\ u_2 = \frac{\lambda}{\mu}F_y,\ F_t + F_y\ tg\sigma = \mu u_3,\ x = 0; \tag{2}$$

$$u_2 = u_1\ tg\sigma,\ y = x\ tg\sigma \tag{3}$$

и начальным данным при $t = 0$

$$U(0, x, y) = U_0(x, y),\ F(0, y) = F_0(y). \tag{4}$$

Здесь $U(t, x, y) = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ – вектор-столбец искомых функций (например, u_3 – малое возмущение давления и т.д.); $x = F(t, y)$ – малое смещение фронта разрыва, причем

$$F(t, 0) = F_0(0) = 0. \tag{5}$$

Матрицы A, B, C_σ и постоянные d, λ, μ описаны в работе.

Далее, предполагая решение U достаточно гладким задача (1)–(4) сводится к основной смешанной задаче для волнового уравнения в октанте, исследованию которой посвящена основная часть работы: в области $t, x, y > 0$ требуется найти решение волнового уравнения

$$\left\{\alpha\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\alpha\frac{\partial^2}{\partial t\partial x} + (\alpha - 1)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\beta\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - (1 + \beta^2)\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}u = 0, \tag{6}$$

удовлетворяющее граничным условиям при $x = 0,\ t, y > 0$

$$\left\{D_1\frac{\partial^2}{\partial t^2} + D_2\frac{\partial^2}{\partial t\partial x} + D_3\frac{\partial^2}{\partial t\partial y} + D_4\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} + D_5\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}u = 0 \tag{7}$$

и при $y = 0,\ t, x > 0$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y} + D_6 \frac{\partial}{\partial x} \right\} u = 0; \tag{8}$$

а так же начальным данным

$$u = u_0(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial t} = u_1(x,y) \tag{9}$$

при $t = 0,\ x, y > 0$. Здесь $u(x,y,t)$ – третья компонента вектора U неизвестных задачи (1)-(4), постоянные $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$ описаны в работе.

Далее приводится формулировка обобщенной задачи соответствующей (6)–(9) и вводится следующее

Определение 1 *Будем говорить, что функция* $w(t,x,y) \in L_2(R^3)$ *принадлежит гильбертову пространству* $H_{2,s_0}(R^3_+)$, *если* $supp\ w \in R^3_+$ *и сужение* $w|_{R^3_+}$ *удовлетворяет условию:* $e^{-s_0 t} w|_{R^3_+} \in H_2(R^3_+)$.

Здесь $R_+ = \{x \in R \mid x \geq 0\},\ s_0 \in R,\ s_0 > 0$.

Это определение описывает класс функций в котором ищется решение.

Во **второй главе** используя гладкость искомого решения и условия, возникающие вследствие особенности в угловой точке формулируются краевые задачи для следов решения $u(x,0,t)$: требуется найти аналитическую функцию в области, лежащей выше кривой γ:

$$\xi = \xi_{**}(\lambda_1) = \frac{\frac{\alpha\beta^2 is + \beta\sqrt{-\lambda_1^2(1-\alpha-\alpha\beta^2) - (1-\alpha)\alpha s^2}}{1-\alpha-\alpha\beta^2} + i\alpha s + \lambda_1}{1-\alpha},\ \lambda_1 \in R, \tag{10}$$

удовлетворяющую условию

$$\begin{aligned} &\frac{\widehat{Z}(\xi_{**}(\lambda_1), s)\big((1+\beta^2)i\eta_*(\lambda_1) - i\xi_{**}(\lambda_1)\beta\big)}{g(\xi_{**}(\lambda_1), \eta_*(\lambda_1), s)} + \\ &+ \frac{\bar{F}(\xi_{**}(\lambda_1), \eta_*(\lambda_1), s)}{g(\xi_{**}(\lambda_1), \eta_*(\lambda_1), s)} = \\ &= \frac{\widehat{Z}(\xi_{**}(-\lambda_1), s)\big((1+\beta^2)i\eta_*(-\lambda_1) - i\xi_{**}(-\lambda_1)\beta\big)}{g(\xi_{**}(-\lambda_1), \eta_*(-\lambda_1), s)} + \\ &+ \frac{\bar{F}(\xi_{**}(-\lambda_1), \eta_*(-\lambda_1), s)}{g(\xi_{**}(-\lambda_1), \eta_*(-\lambda_1), s)},\ \lambda_1 \in R \end{aligned} \tag{11}$$

на ней; и $u(0,y,t)$: требуется найти аналитическую функцию в области, лежащей выше кривой χ:

$$\eta = \eta_{**}(\mu) = \frac{\frac{i(1+\beta^2)\alpha\beta s + \beta\sqrt{\mu^2(1-\alpha-\alpha\beta^2) - (1+\beta^2)\alpha s^2}}{1-\alpha-\alpha\beta^2} + \mu}{1+\beta^2}, \tag{12}$$

удовлетворяющую условию

$$\frac{\widehat{V}(\eta_{**}(\mu),s)g(\xi_*(\mu),\eta_{**}(\mu),s)}{D_4 i\eta_{**}(\mu)-D_2 s}+\bar{F}(\xi_*(\mu),\eta_{**}(\mu),s)= \\ =-\frac{\widehat{V}(\eta_{**}(-\mu),s)g(\xi_*(\mu),\eta_{**}(-\mu),s)}{D_4 i\eta_{**}(-\mu)-D_2 s}-\bar{F}(\xi_*(\mu),\eta_{**}(-\mu),s), \\ \mu\in R \tag{13}$$

на ней. Здесь $\widehat{Z}(\xi,s)=L_{t\to s}F_{x\to\xi}[u(x,0,t)]$ – преобразование Фурье-Лапласа функции $u(x,0,t)$. $\widehat{V}(\eta,s)=L_{t\to s}F_{x\to\xi}[u(0,y,t)]$, функции $g,\bar{F},\xi_*,\eta_*$ описаны в работе.

Далее, каждая из задач (10)–(11) и (12)–(13) сводится к краевой задаче Римана.

В **третьей главе** решается наиболее простая задача для функции $\widehat{V}(\eta,s)$. Ее решение дается формулой

$$\widehat{V}(z,s)=-\frac{iD_4 z-D_2 s}{2g(\xi_*(\delta z),z,s)}\left(\bar{F}(\xi_*(\delta z),z,s)+\bar{F}(\xi_*(\delta z),-z,s)\right), \\ z\in C,\ Im\ z>0. \tag{14}$$

При этом используя условия на гладкость решения находятся значения функций $u(0,0,t),u_x(0,0,t),u_y(0,0,t)$.

Затем использую связь между граничными функциями возникающую вследствие угловой точки на границе находится функция $\widehat{Z}(\xi,s)$

$$\widehat{Z}(\xi,s)=\frac{\bar{F}(\xi_*(\delta\eta_*(\xi)),\eta_*(\xi),s)+\bar{F}(\xi_*(\delta\eta_*(\xi)),-\eta_*(\xi),s)}{2g(\xi_*(\delta\eta_*(\xi)),\eta_*(\xi),s)\big(i(1+\beta^2)\eta_*(\xi)-i\xi\beta\big)}\cdot \\ \cdot g(\xi,\eta_*(\xi),s)-\frac{\bar{F}(\xi,\eta_*(\xi),s)}{i(1+\beta^2)\eta_*(\xi)-i\xi\beta}, \tag{15}$$

и обобщенное решение задачи (6)–(9) в двойственных переменных:

$$\widehat{u}(\xi,\eta,s)=\frac{\bar{F}(\xi,\eta,s)}{p(\xi,\eta,s)}-\frac{i(1+\beta^2)\eta-i\xi\beta}{i(1+\beta^2)\eta_*(\xi)-i\xi\beta}\frac{\bar{F}(\xi,\eta_*(\xi),s)}{p(\xi,\eta,s)}+ \\ +\frac{g(\xi,\eta_*(\xi),s)\Big(\bar{F}\big(\xi_*(\delta\eta_*(\xi)),\eta_*(\xi),s\big)+\bar{F}\big(\xi_*(\delta\eta_*(\xi)),-\eta_*(\xi),s\big)\Big)}{2g\big(\xi_*(\delta\eta_*(\xi)),\eta_*(\xi),s\big)p(\xi,\eta,s)}\cdot \\ \cdot\frac{i(1+\beta^2)\eta-i\xi\beta}{i(1+\beta^2)\eta_*(\xi)-i\xi\beta}-\frac{\bar{F}(\xi_*(\delta\eta_*(\xi)),\eta,s)+\bar{F}(\xi_*(\delta\eta_*(\xi)),-\eta,s)}{p(\xi,\eta,s)}\cdot \\ \cdot\frac{g(\xi,\eta,s)}{2g(\xi_*(\delta\eta_*(\xi)),\eta,s)}. \tag{16}$$

При этом возникают интегральные условия, которые можно интерпретировать как некоторые ограничения на гладкость начальных данных задачи (6)–(9).

В **четвертой главе** исследуется асимптотическое поведение полученного решения при $t \to \infty$. Для этого отдельно рассматриваются случаи финитных и нефинитных начальных данных. В случае финитных начальных данных получено представление функций $u(x,0,t)$ и $u(0,y,t)$ в явном виде. Это представление позволяет определить асимптотику решения и сформулировать один из двух наиболее важных результатов работы

Теорема 1 *Пусть выполнены условия Лопатинского задачи (6)–(9) на границах $x=0, y=0$ и начальные данные $u_0(x,y), u_1(x,y)$ финитны. Тогда имеют место следующие асимптотические представления:*

$$u(x,0,t) = c_0(u_0,u_1,x)\frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right)\ t \to \infty, \tag{17}$$

$$u(0,y,t) = c_1(u_0,u_1,y)\frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right)\ t \to \infty, \tag{18}$$

где $c_0(u_0,u_1,x)$, $c_1(u_0,u_1,y)$ – непрерывные ограниченные функционалы, зависящие от функций $u_0(x,y), u_1(x,y)$ и переменных x,y; символ "о"обозначает о-малое.

При этом решение $u(x,y,t)$ задачи (6)–(9) асимптотически устойчиво по Ляпунову.

В случае нефинитных начальных данных приводится лишь часть функции $u(x,0,t)$, позволяющая обосновать второй наиболее важный результат работы

Теорема 2 *Пусть выполнены условия Лопатинского задачи (6)–(9) на границах $x=0, y=0$ и начальные данные $u_0(x,y)$, $u_1(x,y)$ не финитны, причем $u_0(0,0) \neq 0$. Тогда решение $u \in H_{2,s_0}(R^3_+)$ задачи (6)–(9) неустойчиво по Ляпунову и справедлива оценка*

$$u(x,y,t) \geq c\big(x,u_0(0,0)\big)\ln t,\ \ t > T_0. \tag{19}$$

Здесь $c\big(x,u_0(0,0)\big)$ – ограниченный функционал от переменной x и значения $u_0(x,y)$ в угле клина. $T_0 > 0$ – вещественное число (T_0 не зависит от x, $u_0(0,0)$).

Тем самым в четвертой главе формулируются условия устойчивости и неустойчивости сильной ударной волны в задаче обтекания бесконечного плоского клина, позволяющие четко определить спектр задач, в которых применение метода установления для расчета решения будет обоснованным.

В **пятой главе** доказывается теорема существования и единственности решения задачи (6)–(9) в классе $H_{2,s_0}(R^3_+)$.

Заключение

Сформулируем основные результаты диссертационной работы.

1. Получено представление решения линейной смешанной задачи (6)–(9) в двойственных переменных.

2. Получены представления граничных функций $u(x, 0, t), u(0, y, t)$.

3. Определены условия устойчивости и неустойчивости сильной ударной волны в задаче обтекания клина на линейном уровне.

4. Доказана корректность постановки линейной смешанной задачи (1)–(4).

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю доктору физико-математический наук, профессору Дмитрию Леонидовичу Ткачеву за постоянное внимание и плодотворное руководство работой.

Список работ по теме диссертации

[1] *А.М. Блохин, Д.Л. Ткачев, Ю.Ю. Пашинин.* Неустойчивость сильной ударной волны в задаче обтекания бесконечного плоского клина // Тезисы докладов. IV Всероссийская научная конференция "Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики", Томск, 5-7 октября, 2004 г. с. 366.

[2] *Ю.Ю. Пашинин* Неустойчивость режима течения с сильной ударной волной в задаче обтекания бесконечного плоского клина // Тезисы докладов. V Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям с участием иностранных ученых, Новосибирск, 1-3 ноября, 2004 г. с. 54-55.

[3] *Д.Л. Ткачев, Ю.Ю. Пашинин.* Единственность решения задачи об обтекании клина. Сильная ударная волна // Вестник НГУ, серия "Математика, механика, информатика", том III, 2003 г., выпуск 4, с. 33-50

[4] *A.M. Blokhin, D.L. Tkachev, Yu.Yu. Pashinin.* Stability of shock waves in the problem of flowing around an infinite planar wedge : the case of strong shock // Abstracts of the International Conference "Eleventh International Conference on Hyperbolic Problems. Theory. Numerics. Applications". Lion, France, July 17-21, 2006. pp. 63-65

[5] *Ю.Ю. Пашинин, Д.Л. Ткачев.* Об устойчивости течения с сильной ударной волной в задаче обтекания бесконечного плоского клина // Тезисы докладов. VI Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям с участием иностранных ученых, Кемерово, 29-31 октября, 2005 г. с. 46-47.

[6] *A.M. Blokhin, D.L. Tkachev, Yu.Yu. Pashinin.* Stability condition for strong shock waves in the problem of flow around an infinite plane wedge // Elseview, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, In Press, Available online 6 March 2007.

[7] *A.M. Blokhin, D.L. Tkachev, Yu.Yu. Pashinin.* Stability of shock waves in the problem of flowing around an infinite planar wedge: the case of a strong shock // Proceedings of the 13th International Conference on

Methods of Aerophysical Research (ICMAR 2007), February 5-10, 2007 Akademgorodok, Novosibirsk Russia, pp. 27-32

[8] *A.M. Blokhin, D.L. Tkachev, Yu.Yu. Pashinin.* Stability of shock waves in the problem of flowing around an infinite planar wedge : the case of strong shock // Proceedings of the International Conference "Eleventh International Conference on Hyperbolic Problems. Theory. Numerics. Applications". Lion, France, July 17-21, 2006. pp. 89-107

[9] *Д.Л. Ткачев, Ю.Ю. Пашинин.* Условие Лопатинского в задаче обтекания бесконечного плоского клина. Задача о трихотомии спектра полинома степени n относительно единичной окружности // Тезисы докладов. VII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям с участием иностранных ученых, Красноярск, 1-3 ноября, 2006 г. с. 70-71.