На правах рукописи

Клевцова Юлия Юрьевна

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ДИХОТОМИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

НОВОСИБИРСК — 2007

Работа выполнена в Новосибирском государственном университете

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Г. В. Демиденко
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор С. И. Фадеев, кандидат физико-математических наук, доцент В. И. Костин
Ведущая организация:	Томский государственный университет

Защита состоится " " ноября 2007 г. в часов на заседании диссертационного совета Д 212.174.02 при Новосибирском государственном университете по адресу: 630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного университета.

Автореферат разослан " " октября 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н. Н.И. Макаренко

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Данная диссертация посвящена изучению задачи об экспоненциальной дихотомии линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Исследования дихотомии дифференциальных уравнений были начаты в работах О. Перрона, М. Г. Крейна, А. Д. Майзеля, Х. Массеры и Х. Шефера. В настоящее время имеется ряд критериев экспоненциальной дихотомии. Наиболее изученными являются уравнения с постоянными коэффициентами. В этом случае критерии формулируются с использованием функции Ляпунова, мультипликаторов, в терминах разрешимости краевой задачи для неоднородного дифференциального уравнения на числовой прямой, в терминах разрешимости уравнения Ляпунова со специальной правой частью (см. [1]). Эти теоретические результаты позволили разработать алгоритмы для численного решения задачи о дихотомии дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (А. А. Абрамов, J. Roberts, С. К. Годунов, А. Я. Булгаков и др.).

В случае дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами также имеется большое количество результатов по решению задачи о дихотомии. Существенный вклад в её решение внесли работы М. Г. Крейна, А. Д. Майзеля, Х. Массеры и Х. Шефера, П. Хартмана, В. Коппеля, Е. Н. Розенвассера, А. М. Самойленко, В. Л. Кулика. Следует отметить, что не все результаты, полученные для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, имеют аналоги в случае дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В частности, в случае переменных коэффициентов в литературе не было аналогов ряда важных результатов М. Г. Крейна о дихотомии дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которые имеют очень важное значение при разработке и обосновании алгоритмов численного решения задачи о дихотомии. Поэтому продолжение исследований дихотомии дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами является актуальной задачей.

Цель работы. Исследовать задачу об экспоненциальной дихотомии линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами: получить условия дихотомии, являющиеся аналогами условий Крейна в случае уравнений с постоянными коэффициентами; оценить параметры дихотомии и мультипликаторы; доказать теоремы о возмущении и непрерывной зависимости.

Основные результаты.

Установлены новые условия экспоненциальной дихотомии линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Получены оценки параметров дихотомии и модулей мультипликаторов.

Доказан ряд теорем по теории возмущений для задачи о дихотомии.

На основе полученных теоретических результатов разработаны алгоритмы для численного исследования асимптотической устойчивости решений дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в линейных членах.

Методика исследований. Решение задачи об экспоненциальной дихотомии линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами сведено к исследованию разрешимости специальной краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова. В терминах решений этой краевой задачи установлены основные результаты диссертации.

Научная новизна, теоретическая и практическая ценность. В диссертации установлены новые условия экспоненциальной дихотомии линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Получены легко проверяемые оценки параметров дихотомии, модулей мультипликаторов и оценки на возмущения коэффициентов, сохраняющие дихотомию. Описан новый алгоритм численного исследования асимптотической устойчивости решений дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Работа носит теоретический характер и может служить основанием для разработки новых численных методов для решения задачи об экспоненциальной дихотомии.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на конференциях: XXXVIII, XXXIX и XLI Международные научные студенческие конференции "Студент и научно-технический прогресс" (Новосибирск, 2000 г., диплом второй степени; 2001 г., диплом первой степени; 2003 г., диплом второй степени), Межвузовская научная студенческая конференция "Интеллектуальный потенциал Сибири" (Новосибирск, 2003 г., диплом первой степени), III Всесибирский конгресс женщин-математиков, посвященный памяти С. В. Ковалевской (Красноярск, 2004 г.), VI Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Кемерово, 2005 г., диплом за лучший секционный доклад), Российская конференция “Математика в современном мире” (Новосибирск, 2007 г.). Результаты диссертации докладывались также на семинарах: семинар Института математики СО РАН им. С. Л. Соболева (руководитель: академик Решетняк Ю. Г.), семинар кафедры дифференциальных уравнений Новосибирского государственного университета, семинар “Теоретические и вычислительные проблемы задач математической физики” (руководитель: профессор Блохин А. М.), семинар “Избранные вопросы математического анализа” (руководитель: профессор Демиденко Г. В.).

По результатам работы получено две медали на Открытом конкурсе на лучшую научную работу студентов по естественным, техническим и гуманитарным наукам в вузах Российской Федерации (2001, 2003 гг.), получена первая премия на конкурсе им. М. А. Лаврентьева механико-математического факультета Новосибирского государственного университета научных студенческих и аспирантских работ (2003 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, списка литературы. Объем диссертации составляет 163 страницы. Список литературы состоит из 75 наименований.

Содержание диссертации

Во **введении** приводится определение экспоненциальной дихотомии из [1], обосновывается актуальность темы диссертации, дается краткий обзор истории и современного состояния изучаемой проблемы, приводится краткое изложение содержания диссертации.

Определение. Система

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad -\infty < t < \infty, \tag{1}$$

где $A(t)$ — непрерывная матрица, называется **экспоненциально дихотомичной**, если пространство C^N распадается в прямую сумму замкнутых подпространств

$$C^N = C_1(0) \oplus C_2(0),$$

причем выполняются следующие условия:

а) решения $y_1(t) = Y(t)y_1^0$ уравнения (1), где $Y(t)$ — матрицант системы (1), выходящие в момент $t = 0$ из подпространства $C_1(0)$ ($y_1^0 \in C_1(0)$), подчиняются оценке

$$\|y_1(t)\| \le M_1 e^{-\nu_1(t-s)}\|y_1(s)\| \quad (t \ge s;\ t, s \in (-\infty, \infty))$$

(в дальнейшем $\|\cdot\|$ — спектральная норма) с некоторым показателем $\nu_1 > 0$, $M_1 = \mathrm{const}$;

б) решения $y_2(t) = Y(t)y_2^0$ уравнения (1), выходящие в момент $t = 0$ из подпространства $C_2(0)$ ($y_2^0 \in C_2(0)$), подчиняются оценке

$$\|y_2(t)\| \le M_2 e^{-\nu_2(s-t)}\|y_2(s)\| \quad (t \le s;\ t, s, \in (-\infty, \infty))$$

с некоторым показателем $\nu_2 > 0$, $M_2 = \mathrm{const}$;

в) взаимный наклон подпространств

$$C_1(t) = Y(t)C_1(0), \quad C_2(t) = Y(t)C_2(0)$$

не может при изменении t стать слишком малым; точнее при некотором $\beta > 0$ выполняется условие

$$\mathrm{Sn}(C_1(t), C_2(t)) = \inf_{z_k \in C_k(t)(k=1,2), \|z_k\|=1} \|z_1 + z_2\| \ge \beta, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

Будем называть величины M_1, M_2, ν_1, ν_2, $\beta > 0$ **параметрами дихотомии**. Всюду далее мы предполагаем, что $A(t)$ — T-периодическая матрица, т. е. $A(t + T) \equiv A(t)$.

Глава 1 состоит из четырех параграфов. В **параграфе 1.1** устанавливается критерий экспоненциальной дихотомии системы (1) в терминах решений специальной краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова. А именно, доказываются следующие три теоремы.

Теорема 1. *Пусть система (1) экспоненциально дихотомична, $Y(t)$ — ее матрицант и P — проектор на максимальное инвариантное подпространство матрицы монодромии $Y(T)$, соответствующее собственным значениям, лежащим внутри единичного круга $\gamma = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$,*

$$PY(T) = Y(T)P.$$

Тогда для любой непрерывной матрицы $C(t)$ существует решение $H(t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -\left(Y^{-1}(t)\right)^* P^*Y^*(t)C(t)Y(t)PY^{-1}(t) \\ + \left(Y^{-1}(t)\right)^* (I-P)^* Y^*(t)C(t)Y(t)\,(I-P)\,Y^{-1}(t), \quad 0 < t < T, \\ H(0) = H(T). \end{cases} \tag{2}$$

Если $C(t)$ — непрерывная эрмитова матрица, то существует эрмитово решение краевой задачи (2), а если дополнительно

$$C(t) \geq 0, \text{ при этом } \quad C(t) > 0, \quad t \in G \subseteq [0,T], \quad \mu(G) > 0, \tag{3}$$

то существует эрмитово решение $H(t)$ такое, что $H(0) > 0$.

Теорема 2. *Пусть $C(t)$ — непрерывная эрмитова матрица, удовлетворяющая условию (3). Если система (1) экспоненциально дихотомична, то эрмитово решение $H(t)$ краевой задачи (2) такое, что $H(0) > 0$ и*

$$H(0) = P^*H(0)P + (I-P)^*\,H(0)\,(I-P)\,, \tag{4}$$

определяется единственным образом. Оно является положительно определенным при всех $t \in [0,T]$ и представимо в виде интеграла

$$H(t) = \left(Y^{-1}(t)\right)^* \left[\int_t^{\infty} P^*Y^*(s)C(s)Y(s)Pds\right] Y^{-1}(t)$$

$$+ \left(Y^{-1}(t)\right)^* \left[\int_{-\infty}^{t} (I-P)^*\,Y^*(s)C(s)Y(s)\,(I-P)\,ds\right] Y^{-1}(t). \tag{5}$$

Теорема 3. *Пусть $C(t)$ — непрерывная эрмитова матрица, удовлетворяющая условию (3), P — матрица такая, что*

$$P^2 = P, \quad PY(T) = Y(T)P.$$

Если существует эрмитово решение $H(t)$ краевой задачи (2) такое, что $H(0) > 0$ и выполнено условие (4), то система (1) экспоненциально дихотомична, при этом P является проектором на максимальное *инвариантное подпространство матрицы монодромии $Y(T)$, соответствующее собственным значениям, лежащим внутри единичного круга γ.*

Вывод. Из теорем 1-3 вытекает, что исследование экспоненциальной дихотомии системы (1) можно свести к нахождению эрмитовой матрицы $H(t)$ и проектора P ($P^2 = P$), являющихся решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -\left(Y^{-1}(t)\right)^* P^*Y^*(t)C(t)Y(t)PY^{-1}(t) \\ +(Y^{-1}(t))^* \left(I-P\right)^* Y^*(t)C(t)Y(t)\left(I-P\right)Y^{-1}(t), \quad 0 < t < T, \\ H(0) = H(T) > 0, \\ H(0) = P^*H(0)P + \left(I-P\right)^* H(0)\left(I-P\right), \\ PY(T) = Y(T)P. \end{cases} \tag{6}$$

Этот результат является аналогом соответствующих утверждений в задаче о дихотомии систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (см., например, [1, 2]).

В **параграфе 1.2** устанавливаются оценки на параметры дихотомии M_1, M_2, ν_1, ν_2 в терминах решения краевой задачи (2). Напомним один критерий экспоненциальной дихотомии (см., например, [1]). Система (1) экспоненциально дихотомична тогда и только тогда, когда краевая задача

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = A(t)y + f(t), \quad -\infty < t < \infty, \\ \sup\limits_{-\infty<t<\infty} \|y(t)\| < \infty, \end{cases} \tag{7}$$

разрешима для любой непрерывной ограниченной вектор-функции $f(t)$. В работе получены оценки для нормы матрицы Грина, на основе которых устанавливаются оценки параметров дихотомии ν_1, ν_2, M_1, M_2.

Будем считать везде ниже, что $C(t)$ — T-периодическая непрерывная эрмитова матрица, удовлетворяющая условию (3), если не оговорено обратное.

Введем обозначение

$$\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{\|C^{-1}(t)\|}, & t \in G, \\ 0, & t \notin G, \end{cases} \tag{8}$$

где $t \in [0,T]$, G определено в (3). Продолжим на всю ось $-\infty < t < \infty$ функцию $\alpha(t)$ периодически с периодом T.

Будем предполагать, что система (1) экспоненциально дихотомична. Пусть проектор P и эрмитова матрица $H(t)$ удовлетворяют задаче (6). В силу теоремы 2 матрица $H(t)$ имеет вид (5), т. е. представима в виде

$$H(t) = H^+(t) + H^-(t),$$

где

$$H^+(t) = (Y^{-1}(t))^* \left[\int_t^\infty P^* Y^*(s) C(s) Y(s) P \, ds \right] Y^{-1}(t),$$

$$H^-(t) = \left(Y^{-1}(t)\right)^* \left[\int_{-\infty}^t (I-P)^* \, Y^*(s) C(s) Y(s) \, (I-P) \, ds \right] Y^{-1}(t).$$

Теорема 4. *Пусть $\gamma_1(t) > 0$ — минимальное собственное число матрицы $H(t)$. Тогда для нормы матрицы Грина краевой задачи (7) имеют место следующие оценки*

$$\|G(t,\tau)\|^2 \le \frac{\|H^+(\tau)\|}{\gamma_1(t)} \exp\left(- \int_\tau^t \frac{\alpha(s)}{\|H^+(s)\|} ds \right), \quad t > \tau,$$

$$\|G(t,\tau)\|^2 \le \frac{\|H^-(\tau)\|}{\gamma_1(t)} \exp\left(- \int_t^\tau \frac{\alpha(s)}{\|H^-(s)\|} ds \right), \quad t < \tau.$$

Из этого результата вытекают оценки на параметры дихотомии M_1, M_2, ν_1, ν_2.

Следствие. *Пусть $C(t) \equiv I$, $H(t)$ — решение краевой задачи (2), $H_{\max} = \max\limits_{t \in [0,T]} \|H(t)\|$. Тогда для решения системы (1) имеют место оценки*

$$\|y_1(t)\|^2 \le \frac{H_{\max}}{\gamma_1(t)} e^{\frac{-(t-\tau)}{H_{\max}}} \|y_1(\tau)\|^2, \quad t > \tau,$$

$$y_1(t) = Y(t) y_1^0, \quad y_1^0 \in C_1(0), \quad C_1(0) = PC^N,$$

$$\|y_2(t)\|^2 \le \frac{H_{\max}}{\gamma_1(t)} e^{\frac{-(\tau-t)}{H_{\max}}} \|y_2(\tau)\|^2, \quad \tau > t,$$

$$y_2(t) = Y(t)y_2^0, \quad y_2^0 \in C_2(0), \quad C_2(0) = (I-P)C^N.$$

Установленные оценки являются аналогами соответствующих неравенств в случае постоянных коэффициентов (см., например, [2]). Из этих оценок, в частности, вытекают оценки нормы решения краевой задачи (7).

Теорема 5. *Для нормы решения краевой задачи (7) имеет место оценка*

$$\sup_{-\infty<t<\infty} \|y(t)\| \le \frac{2\int\limits_0^T \|H(s)\|ds}{\max\limits_{\xi\in[0,T]} \gamma_1(\xi) \left(1 - \exp\left(-\int\limits_0^T \frac{\alpha(s)}{\|H(s)\|}ds\right)\right)} \sup_{-\infty<t<\infty} \|f(t)\|.$$

В **параграфе 1.3** в терминах решения краевой задачи (2) устанавливается оценка снизу на параметр дихотомии β, характеризующий взаимный наклон подпространств $C_1(t)$ и $C_2(t)$, а также получена оценка на расстояние мультипликаторов системы (1) до единичной окружности $\Gamma = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$. Напомним, что согласно спектральному критерию система (1) экспоненциально дихотомична тогда и только тогда, когда спектр матрицы монодромии $Y(T)$ не пересекается с единичной окружностью Γ (см., например, [1]).

Теорема 6. *На взаимный наклон подпространств*

$$C_1(t) = Y(t)PC^N, \quad C_2(t) = Y(t)(I-P)C^N$$

имеет место оценка снизу

$$\mathrm{Sn}\ (C_1(t), C_2(t)) \ge \min_{s\in[0,T]} \frac{\gamma_1(s)}{\min\{\|H^+(s)\|, \|H^-(s)\|\}}.$$

Теорема 7. *Для собственных значений матрицы монодромии $Y(T)$, лежащих внутри единичного круга $\gamma = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$, имеют место оценки:*

$$|\lambda_j| \le \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^T \frac{\alpha(s)}{\|H^+(s)\|}ds\right), \quad j = 1, 2, \dots l.$$

Для собственных значений матрицы монодромии $Y(T)$, лежащих вне замыкания единичного круга γ, имеют место оценки:

$$|\lambda_j| \geq \exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_{-T}^{0} \frac{\alpha(s)}{\|H^-(s)\|}ds\right), \quad j = l+1, l+2, \dots N.$$

В **параграфе 1.4** полученные выше результаты рассматриваются в частном случае, когда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво при $t \geq 0$. Из доказанных теорем, в частности, вытекают утверждения (теоремы 9–11), обобщающие соответствующие результаты из [3].

Глава 2 состоит из четырех параграфов. В **параграфах 2.1, 2.2** рассматривается задача об экспоненциальной дихотомии возмущенной системы

$$\frac{dy}{dt} = (A(t) + A_1(t))y, \quad -\infty < t < \infty, \tag{9}$$

где $A_1(t)$ — T-периодическое непрерывное возмущение матрицы $A(t)$. Приводятся оценки на возмущение $A_1(t)$ в терминах решения краевой задачи (2), при которых возмущенная система (9) остается экспоненциально дихотомичной, а также доказываются несколько теорем о непрерывной зависимости решений краевой задачи (2) от элементов матрицы $A(t)$.

Сформулируем некоторые утверждения.

Теорема 12. *Пусть спектр матрицы монодромии $Y(T)$ системы (1) не пересекается с единичной окружностью $\Gamma = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$, число собственных значений матрицы монодромии, лежащих внутри единичного круга $\gamma = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$, равно l. Рассмотрим возмущенную систему (9), где непрерывная матрица $A_1(t)$ — T-периодическое возмущение матрицы $A(t)$. Если $A_1(t)$ такое, что*

$$de^{aT}(e^{a_1 T} - 1) < 1,$$

где

$$d = \max_{|\lambda|=1} \|(\lambda I - Y(T))^{-1}\|,$$

то спектр матрицы монодромии $\widetilde{Y}(T)$ возмущенной системы (9) не пересекается с единичной окружностью Γ, число ее собственных значений, лежащих внутри единичного круга γ, также равно l.

Следствие. *Пусть спектр матрицы монодромии системы (1) не пересекается с единичной окружностью* Γ*, число собственных значений матрицы монодромии, лежащих внутри единичного круга* γ*, равно* l*. Рассмотрим возмущенную систему (9), где непрерывная матрица* $A_1(t)$ *—* T*-периодическое возмущение матрицы* $A(t)$*. Если* $A_1(t)$ *такая, что*

$$\nu e^{aT}(e^{a_1 T}-1)<1,$$

где

$$a=\max_{t\in[0,T]}\|A(t)\|,\quad a_1=\max_{t\in[0,T]}\|A_1(t)\|,$$

$$\nu=\pi\rho+\sqrt{2\rho+(\pi\rho)^2},\quad \rho=a\|H(0)\|\frac{1+\exp\left(-\int\limits_0^T\frac{1}{\|H(s)\|}ds\right)}{1-\exp\left(-\int\limits_0^T\frac{1}{\|H(s)\|}ds\right)},$$

матрица $H(t)$ *— решение краевой задачи (2) при* $C(t)\equiv I$*, то спектр матрицы монодромии возмущенной системы (9) не пересекается с единичной окружностью* Γ*, число ее собственных значений, лежащих внутри единичного круга* γ*, также равно* l*.*

Теорема 13. *Пусть выполнены условия следствия к теореме 12. Тогда существует единственное решение краевой задачи*

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}\widetilde{H}+\widetilde{H}(A(t)+A_1(t))+(A(t)+A_1(t))^*\widetilde{H}\\ =-\left(\widetilde{Y}^{-1}(t)\right)^*\left(\widetilde{P}^*\widetilde{Y}^*(t)\widetilde{Y}(t)\widetilde{P}\right.\\ \left.-\left(I-\widetilde{P}\right)^*\widetilde{Y}^*(t)\widetilde{Y}(t)\left(I-\widetilde{P}\right)\right)\widetilde{Y}^{-1}(t),\quad 0<t<T,\\ \widetilde{H}(0)=\widetilde{H}(T),\end{array}\right. \tag{10}$$

такое, что $\widetilde{H}(0)>0$ *и выполнено условие*

$$\widetilde{H}(0)=\widetilde{P}^*\widetilde{H}(0)\widetilde{P}+\left(I-\widetilde{P}\right)^*\widetilde{H}(0)\left(I-\widetilde{P}\right),$$

где $\widetilde{Y}(t)$ *— матрицант возмущенной системы (9),* $\widetilde{P}$ *— проектор на максимальное инвариантное подпространство матрицы* $\widetilde{Y}(T)$*, соответствующее собственным значениям, лежащим внутри единичного круга* γ*,*

$$\widetilde{P}\widetilde{Y}(T)=\widetilde{Y}(T)\widetilde{P}.$$

Следствие. *Пусть выполнены условия следствия к теореме 12. Тогда для нормы разности решений краевых задач (2) при $C(t) \equiv I$ и (10) имеет место оценка*

$$\|\widetilde{H}(t) - H(t)\| \leq 4e^{4aT}\eta(1 + e^{4aT}\eta)\|H(t)\|, \quad t \in [0, T], \tag{11}$$

где

$$\eta = \nu e^{3aT}\left[\frac{(e^{a_1T} - 1)e^{(a+3a_1)T}\nu}{1 - e^{aT}(e^{a_1T} - 1)\nu} + e^{3a_1T} - 1\right].$$

Оценка (11) показывает, что задача о нахождении решения краевой задачи (2) хорошо обусловлена, поскольку если мы возьмем некоторое малое возмущение $A_1(t)$, то оценка относительной погрешности решения краевой задачи (2) будет такого же порядка малости.

В **параграфе 2.3** мы рассматриваем случай асимптотической устойчивости ($P = I$) и доказываем аналогичные теоремы о возмущении и непрерывной зависимости (теоремы 15–20).

Дополнительно, в **параграфе 2.4** показано, что в терминах решения краевой задачи (2) при $P = I$ можно получить оценки границы области притяжения нулевого решения и скорости убывания решений при $t \to +\infty$ системы

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \varphi(t, y), \quad t \geq 0, \tag{12}$$

где вектор-функция $\varphi(t, y)$ является гладкой и $\varphi(t, 0) = 0$.

В главах 1, 2 мы изучали задачу об экспоненциальной дихотомии системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (1). Были доказаны теоремы об условиях дихотомии в терминах разрешимости специальной краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова. Используя решение этой задачи, установлены оценки норм функции Грина краевой задачи для системы дифференциальных уравнений на числовой прямой, получены неравенства для угловой характеристики подпространств $C_1(t)$ и $C_2(t)$, оценки модулей мультипликаторов и параметров дихотомии, а также доказаны теоремы о возмущении и непрерывной зависимости. В качестве следствий установлен ряд результатов об асимптотической устойчивости нулевого решения линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (см., например, [1, 2]). Отсюда вытекает, что исследование задачи об экспоненциальной дихотомии и задачи об асимптотической устойчивости системы с периодическими коэффициентами можно свести к решению специальной краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова. Такой способ решения указанных задач является аналогом решения подобных задач в случае дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Но вместо краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова в случае систем с постоянными коэффициентами используется матричное уравнение Ляпунова

$$HA + A^*H = -C.$$

Как известно, это уравнение можно решать численно, получая результаты с гарантированной точностью (см., например, [2]), и, следовательно, успешно проводить численные исследования задач о дихотомии и об асимптотической устойчивости в случае дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Из теорем о непрерывной зависимости, доказанных в главе 2, вытекает, что построение решения рассматриваемой краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова является хорошо обусловленной задачей, поэтому можно попытаться разработать алгоритмы для численного исследования задач об экспоненциальной дихотомии и об асимптотической устойчивости в случае периодических коэффициентов. Опираясь на полученные результаты, в следующей главе на примере задачи об асимптотической устойчивости мы показываем, что это действительно возможно.

Глава 3 состоит из четырех параграфов. В дальнейшем будем рассматривать частный случай экспоненциальной дихотомии — случай асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1) при $t \geq 0$. Из результатов, изложенных выше, вытекает, что скорость убывания решения систем (1) и (12) при $t \to +\infty$, оценки модулей мультипликаторов системы (1) и области притяжения системы (12) указываются в терминах нормы решения краевой задачи (2). Поэтому можно предложить два подхода к решению конкретных задач на практике об асимптотической устойчивости нулевого решения систем (1) и (12) (**параграф 3.1**):

1) вычисление интегралов (5) при $P = I$;

2) приближенное решение краевой задачи (2) при $P = I$.

В работе предлагается реализация этих подходов. В **параграфе 3.2** строятся приближения к интегралам (5) при $P = I$ и устанавливаются оценки скорости сходимости построенных приближений. На основе первого подхода в **параграфе 3.3** предлагается алгоритм для численного исследования асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1). Этот алгоритм является аналогом алгоритма для случая постоянных коэффициентов (см., например, [2]). В **параграфе 3.4** строятся приближенные решения краевой задачи (2) при $P = I$ с использованием метода Рунге – Кутта и устанавливаются оценки скорости сходимости приближений.

Литература

[1] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1970.

[2] Годунов С. К. *Современные аспекты линейной алгебры.* Новосибирск: Научная книга, 1997.

[3] Демиденко Г. В., Матвеева И. И. *Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами* // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 332–348.

Работы автора по теме диссертации

[1] Клевцова Ю. Ю. *Приближенные решения краевой задачи на числовой прямой для систем дифференциальных уравнений* // Материалы XXXVIII Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Математика, часть I. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2000. С. 80–81.

[2] Клевцова Ю. Ю. *О непрерывной зависимости решений краевой задачи на числовой прямой для линейных систем дифференциальных уравнений* // Материалы XXXIX Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс": Математика, часть I. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2001. С. 143–144.

[3] Клевцова Ю. Ю. *О непрерывной зависимости решений одной краевой задачи для линейных систем дифференциальных уравне-*

ний // Труды XXXIX Международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс”. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2001. С. 229–236.

[4] Demidenko G. V., Klevtsova Y. Y. *A modification of the matrix sign function method* // Selçuk Journal of Applied Mathematics, 2001. V. 2, N 1. P. 47–58.

[5] Клевцова Ю. Ю. *Об одном разностном уравнении и локализации матричного спектра внутри эллипса* // Материалы Межвузовской научной студенческой конференции “Интеллектуальный потенциал Сибири”. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2003. С. 4–6.

[6] Клевцова Ю. Ю. *Об одном матричном уравнении типа Ляпунова* // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: математика, механика, информатика. 2004. Т. 4, вып. 1. С. 22–32.

[7] Клевцова Ю. Ю. *О численном исследовании асимптотической устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами* // Сиб. журн. индустр. математики. 2005. Т. 8, № 2. С. 103–115.

[8] Клевцова Ю. Ю. *О численном исследовании асимптотической устойчивости решений линейной системы с периодическими коэффициентами* // VI Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Тезисы докладов. Кемерово: Институт вычислительных технологий СО РАН, 2005. С. 21–22.

[9] Клевцова Ю. Ю. *Алгоритм для численного исследования асимптотической устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами* // Сиб. журн. индустр. математики. 2007. Т. 10, № 3. С. 58–70.

[10] Демиденко Г. В., Клевцова Ю. Ю. *Экспоненциальная дихотомия линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.* Новосибирск, 2007. 14 с. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 197).

Клевцова Юлия Юрьевна

Экспоненциальная дихотомия линейных
дифференциальных уравнений
с периодическими коэффициентами

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать	03.10.07.	Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 1,0.	Уч.-изд. л. 1,0.	Тираж 100 экз.
Заказ № 148.		

Отпечатано в ООО "Омега Принт"
пр. Академика Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия.