На правах рукописи

Раенко Елена Александровна

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИГОЛОМОРФНОГО ВЕКТОРА

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Горно-Алтайск, Новосибирск — 2006

Работа выполнена в организациях:

Горно-Алтайский государственный университет,

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН

Научный руководитель: доктор физико-математических наук Семенко Е.В.

Научный консультант: академик Монахов В.Н.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Сычев А.В.

доктор физико-математических наук, профессор Соппа М.С.

Ведущая организация: Кемеровский государственный университет

Защита состоится "___"________________ 2006 года в ___ часов на заседании Диссертационного Совета Д 212.174.02 при Новосибирском государственном университете по адресу: 630090, Новосибирск–90, ул. Пирогова, 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного университета.

Автореферат разослан "___"________ 2006 года

Ученый секретарь

Диссертационного Совета,

доктор физико-математических наук Н.И. Макаренко

Общая характеристика работы

Актуальность проблемы. Процессы тепломассопереноса гидродинамическими потоками жидкости описываются системами эллиптических уравнений, представленных в комплексной форме. Для таких систем построена теория краевых задач, наиболее изученной из которых, является задача Дирихле для линейного уравнения второго порядка, коэффициенты которого зависят только от x, y.

В работах К. Миранда (1957), М. И. Вишика (1961), А. Н. Вольперта (1961), А. В. Бицадзе (1966) основным подходом к исследованию этой задачи Дирихле является представление ее решений с помощью какого - либо потенциала и сведение к уравнению с вполне непрерывным оператором. При этом безусловная разрешимость задачи Дирихле доказывается при очень жестких ограничениях на коэффициенты оператора (вплоть до их постоянства) или на размеры области. В работе О.А. Ладыженской и Н.Н. Уральцевой (1973) предложен метод разрешимости задачи Дирихле на основе априорных оценок ее решений применительно к квазилинейному уравнению с векторным оператором в главной части. В. Н. Монаховым (1977) была исследована разрешимость задачи Гильберта для квазианалитического вектора с помощью интегральных операторов T и $S = \partial T/\partial z$.

При обтекании тел потоками жидкости с достаточно большими скоростями движения возникают струйные течения, когда поток отрывается с поверхности тела и в результате за телом образуется область постоянного давления (каверна), ограниченная неизвестными поверхностями (струями).

В.М. Шурыгин (1966) для описания топологически сложных гидродинамических течений предложил моделировать дополнительные потоки жидкости (с заданными или искомыми границами) помещением каждого из таких потоков на свой лист римановой поверхности (так называемые схемы Шурыгина). В.Н. Монаховым (1977) для искомого решения системы уравнений, отвечающей схеме Шурыгина, доказаны априорные оценки, обеспечивающие его локальную единственность.

В гидродинамике (в частности, в так называемой схеме обтекания Эфроса) и теории фильтрации имеют приложения краевые задачи Векуа на римановых поверхностях. Линейная задача Векуа широко изучалась ранее (А. И. Бикчантаев (1987), Juri L. Rodin (1987)). Ими была установлена нетеровость задачи и вычислен ее индекс.

В.Н. Монаховым и Е.В. Семенко (2003) была предложена корректная постановка линейной краевой задачи сопряжения аналитической функции и доказана ее однозначная разрешимость.

Цель работы. В диссертации доказывается однозначная разрешимость задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических систем уравнений с матрицами Q^1, Q^2 близкими к диагональным и треугольным. Доказывается существование и единственность струйных течений, отвечающих схеме Шурыгина, а также разрешимость краевой задачи сопряжения для нелинейного уравнения Векуа на римановой поверхности.

Методы исследования. Основным методом исследования однозначной разрешимости линейной задачи Дирихле является построение априорной оценки ее решения в предположении, что коэффициенты уравнения принадлежат пространству L_p , $p > 2$. В квазилинейном случае разрешимость доказывается путем построения вполне непрерывного оператора задачи, к которому применим принцип Шаудера, а единственность – наложением условий слабой связанности уравнений системы.

Научная новизна. Все основные результаты, изложенные в диссертации являются новыми и подтверждены полными доказательствами.

Теоретическая и практическая значимость. В основном работа носит теоретический характер, ее результаты могут быть использованы при численном решении задач тепломассопереноса.

Публикации и апробации автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора.

Материалы диссертации неоднократно докладывались на международных и российских конференциях: "Математические проблемы механики сплошных сред" (г. Новосибирск 1999, 2000, 2001 гг.), "Математические методы в механике природных сред и экологии" (г. Барнаул 2002 г.).

Результаты диссертации доложены также на семинарах : института гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН "Математические проблемы механики сплошных сред" под руководством академика Монахова В. Н., чл.-корр. РАН Плотникова П. И. (2006), лаборатории теории функции института математики им. С. Л. Соболева СО РАН под руководством д.ф.-м.н. профессора Асеева В. В. и д.ф.-м.н. профессора Сычева А. В. (2006), кафедры дифференциальных уравнений Новосибирского государственного университета "Теоретические и вычислительные проблемы задач математической физики" под руководством д.ф.-м.н. профессора Блохина А. М. (2006).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на параграфы и списка литературы.

Общий объем диссертации 98 страниц машинописного текста, библиография содержит 36 наименований, в основном монографического характера.

Содержание работы

Введение к диссертации содержит краткие исторические сведения по ее теме, изложение причин и целей проводимых в ней исследований и перечисление основных положений работы.

Глава I. Об однозначной разрешимости задачи Дирихле для квазианалитического вектора.

Первая часть главы (§1, §2) посвящена изложению известных результатов и краткому обзору работ. В параграфе 3 приводится описание квазилинейной модели потоков жидкости и гидродинамическая интерпретация ее коэффициентов. В параграфе 4 доказаны однозначная разрешимость и устойчивость линейной задачи; параграф 5 посвящен доказательству разрешимости и единственности квазилинейной задачи Дирихле с диагональными матрицами коэффициентов, а в параграфе 6 изучается задача Дирихле для уравнений с квазидиагональными матрицами. Завершает главу гидродинамическая интерпретация результатов (§7).

Вспомогательные сведения (§1). В этом параграфе приводятся некоторые необходимые сведения из функционального анализа.

Уравнения диффузии (§2). В параграфе приведен краткий обзор работ, посвященных построению математических моделей процесса тепломассопереноса и теории граничной задачи Гильберта.

Квазилинейная модель (§3).

Квазианалитические векторы описывают диффузионные процессы тепломассопереноса потоками жидкости. В параграфе строится квазилинейная модель диффузионного процесса в предположении, что матрица диффузии диагональна:

$$\mathrm{w}_{k\bar{z}} + \mu_{1k}\mathrm{w}_{kz} + \mu_{2k}\overline{\mathrm{w}}_{k\bar{z}} + A_k\mathrm{w}_k + B_k\overline{\mathrm{w}}_k + F_k = 0,\ \ k = \overline{1,n}; \tag{1}$$

$$\sup_{k,z,\mathrm{w}_k} (\mid \mu_{1k} \mid + \mid \mu_{2k} \mid) = \mu_0 < 1, \tag{2}$$

где $\mathrm{w}_k = \psi_k + i\varphi_k$ — комплексный потенциал течения, ψ_k — функции тока, φ_k $(k = \overline{1, n-1})$ — компоненты примесей, φ_n — температура, $z = x + iy$. Условие (2) отражает факт эллиптичности уравнения (1) для $\mathrm{w}_k(z)$. Для системы уравнений (1), (2) в круге $\Omega :\mid z \mid< 1$ получена следующая задача Дирихле:

$$\mathrm{Im}\ \mathrm{w}_k(e^{i\gamma}) = 0,\ \ \gamma \in [0, 2\pi];\ \ \mathrm{Re}\ \mathrm{w}_k(1) = 0,\ \ k = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Линейная задача (§4).

Приводится постановка линейной задачи Дирихле (1^0), т.е. когда вектор коэффициентов $Q_k = (\mu_{1k}, \mu_{2k}, A_k, B_k, F_k)$ уравнения (1) является функцией переменной z $(Q_k = Q_k(z))$. Дополнительно к условию (2) эллиптичности уравнения (1) предполагается, что $(A_k, B_k, F_k) \in L_p(\Omega),\ p > 2,\ (k = \overline{1,n})$.

Получена априорная оценка (2^0) решения $\mathrm{w}_k = \mathrm{w}_k[\zeta(z)],\ k = \overline{1,n}$ линейной задачи (1) - (3), которая обеспечивает справедливость теорем существования и единственности решений задачи (1) - (3). Доказано утверждение:

Теорема 1 (об однозначной разрешимости). *Пусть* $(A_k(z), B_k(z), F_k(z)) \in L_p(\Omega)$, $p > 2$. *Тогда задача (1) - (3) однозначно разрешима и для ее решения* $\mathrm{w} = (\mathrm{w}_1(z), \ldots, \mathrm{w}_n(z))$

справедливы оценки:

$$\| \mathrm{w}_k \|^{(1)}_{q,\Omega} \le M \| F_k \|_{q,\Omega},\ 2 < q(\mu_0, p) \le p,\ f_k = lF_k, \tag{4}$$

где $M = M(\mu_0, \| (\mathbf{A}, \mathbf{B}) \|_{p,\Omega}) = const < \infty,\ \mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n),\ \mathbf{B} = (B_1, \dots, B_n)$.

Теорема устойчивости (3^0). В пункте рассматривается семейство задач $(1^\delta) - (3^\delta)$ с вектором коэффициентов $Q_k(\delta) = Q_k(z,\delta) \equiv Q_k(z) + Q^\delta_k(z),\ Q_k(z,\delta) \in B_p(\Omega),\ p > 2$, $Q^\delta_k(z) = 0$ при $\delta = 0$.

Получена априорная оценка решения $\mathrm{w}_k(\delta),\ k = \overline{1,n}$ уравнения (1) для разности $\mathrm{w}^\delta_k(z) = \mathrm{w}_k(z,\delta) - \mathrm{w}_k(z,0)$

$$\| \mathrm{w}^\delta_k \|^{(1)}_{q,\Omega} \le M_1(\| Q_k(\delta) \|_{B_q}) \| Q^\delta_k \|_{B_q}, \tag{5}$$

$q > 2,\ k = \overline{1,n}$, связывающая нормы вариаций $\mathrm{w}^\delta_k(z)$ решений задачи $(1^\delta) - (3^\delta)$ с вариациями $Q^\delta_k(z) = Q_k(z,\delta) - Q_k(z,0)$ векторов коэффициентов (1^δ), из которой следует устойчивость в $W^1_q(\Omega),\ q > 2$ решений задачи (1) - (3) относительно вариации векторов $Q_k(z,\delta)$ коэффициентов уравнения (1). Доказано утверждение:

Теорема 2 (устойчивости). *Решения* $\mathrm{w}(z,\delta) = (\mathrm{w}_1, \dots, \mathrm{w}_n)$ *задачи (1) - (3) устойчивы в* $W^1_q(\Omega),\ q > 2$ *относительно вариации векторов* $Q_k(z,\delta)$ *коэффициентов уравнения (1) в пространстве* $B_q(\Omega)$, *при этом для вариаций* $\mathrm{w}^\delta_k(z) = \mathrm{w}_k(z,\delta) - \mathrm{w}_k(z,0)$ *справедливы оценки (5) через вариации* $Q^\delta_k(z) = Q_k(z,\delta) - Q_k(z,0)$ *векторов коэффициентов (1).*

Разрешимость и единственность решений квазилинейной задачи (§5). В параграфе рассматривается общий случай квазилинейного уравнения (1), в котором векторы $Q_k = (\mu_{1k}, \mu_{2k}, A_k, B_k, F_k)$ коэффициентов (1) являются функциями переменных $z \in \Omega$ и $\mathbf{w} = (\mathrm{w}_1, \dots, \mathrm{w}_n) \in R^{2n}$, $Q_k = Q_k(z, \mathbf{w})$:

$$\mathrm{w}_{k\bar z} + \mu_{1k}(z,\mathbf{w})\mathrm{w}_{kz} + \mu_{2k}(z,\mathbf{w})\bar{\mathrm{w}}_{k\bar z} + A_k(z,\mathbf{w})\mathrm{w}_k + B_k(z,\mathbf{w})\bar{\mathrm{w}}_k + F_k(z,\mathbf{w}) = 0,$$

$$\sup_{k,z,\mathbf{w}} (| \mu_{1k}(z,\mathbf{w}) | + | \mu_{2k}(z,\mathbf{w}) |) = \mu_0 < 1.$$

При этом на коэффициенты F_k накладывается условие невозможности роста по $\mathbf{w}$. Предположения:

(i) $F_k(z,\mathbf{w}) = \varepsilon C_k(z,\mathbf{w})\mathbf{w} + D_k(z,\mathbf{w}),\ \varepsilon > 0$ искомый параметр, C_k— матрица $(n \times n)$.

(ii) векторы $Q_k(z,\mathbf{w})$ непрерывны по $\mathbf{w}$ при $z \in \Omega$ и для любого $\mathbf{w} \in R^{2n}$

$$\sup_{k,\mathbf{w}} \| (A_k, B_k, C_k, D_k) \|_{p,\Omega} \le R_0 < \infty,\ p > 2.$$

Рассматривается линеаризованная задача $(1^*) - (3^*)$, полученная путем подстановки в коэффициенты $Q_k(z) = Q_k(z,\mathbf{w})$ задачи (1) - (3) произвольно фиксированной вектор

- функции $\mathbf{w}^*(z) \in C(\Omega)$. Используя вложение $W_q^1(\Omega) \subset C(\Omega)$ и условия $(i),(ii)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ находится оценка решения $\mathbf{w}(z)$ линеаризованной задачи $(1^*)-$ (3^*). При этом решение $\mathbf{w} = (\mathrm{w}_1, \ldots, \mathrm{w}_n)$ задачи $(1^*) - (3^*)$ определяет оператор над вектор - функцией $\mathbf{w}^*(z) \in C(\Omega) : \mathbf{w} = \Lambda(\mathbf{w}^* \mid z),\ \Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n),\ \Lambda : C(\Omega) \to W_q^1(\Omega),\ q > 2$, к которому применим принцип Шаудера. Доказано утверждение.

Теорема 3 (существования). *При выполнении условий $(i),(ii)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ задача (1) - (3) имеет по крайней мере одно решение $\mathbf{w}(z) \in W_q^1(\Omega) \cap N(\Omega),\ q > 2$.*

Теорема единственности (2^0). Рассматривается уравнение

$$\omega_{k\bar z} + \mu_{1k}(z,\mathbf{w})\omega_{kz} + \mu_{2k}(z,\mathbf{w})\bar\omega_{k\bar z} + f_k = 0,\ \sup(\mid \mu_{1k} \mid + \mid \mu_{2k} \mid) = \mu_0 < 1, \tag{6}$$

для разности $\boldsymbol{\omega}(z) = \mathbf{w}(z) - \mathbf{w}^*(z),\ \boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in R^{2n}$, где $(\mathbf{w}(z), \mathbf{w}^*(z)) \in W_q^1(\Omega),\ q > 2-$ два различных ограниченных решения задачи (1) - (3), $f_k = \mathrm{w}_{kz}^* \Delta\mu_{1k} + \bar{\mathrm{w}}_{k\bar z}^* \Delta\mu_{2k} + \Delta F_k$. Здесь $\Delta Q_k = Q_k(z,\mathbf{w}) - Q_k(z,\mathbf{w}^*),\ Q_k = (\mu_{1k}, \mu_{2k}, F_k),\ k = \overline{1,n}$.

Используя специальный вид формулы конечных приращений для функции многих переменных $\Delta\Phi(\mathbf{w}) = \sum\limits_{l=1}^{n} \partial_l\Phi(\mathrm{w}) \cdot \Delta\mathrm{w}_l$, где $\partial_l\Phi(\mathrm{w}) = \Delta_l\Phi(\mathrm{w})/\Delta\mathrm{w}_l,\ \Delta\mathrm{w}_l = \mathrm{w}_l - \mathrm{w}_l^*$, условия

(j) $\quad Q_k(z,\mathbf{w}) \in L_p(\Omega),\ p > 2\ \forall \mid \mathbf{w} \mid < \infty,\ k = \overline{1,n}$,

(jj) $\quad \mid \partial_l Q_k(z,\mathbf{w}) \mid \leq \varepsilon \ll 1$ при $k \neq l = \overline{1,n}$,

$\qquad \mid \partial_k Q_k(z,\mathbf{w}) \mid \leq P = const < \infty,\ k = \overline{1,n},\ (z,\mathbf{w}) \in \Omega \times R^{2n}$.

и вложение $W_q^1(\Omega) \subset C(\Omega),\ q > 2$ доказывается, что $\parallel \boldsymbol{\omega} \parallel_{\infty,\Omega} = 0$, а это значит, что $\mathbf{w} = \mathbf{w}^*$, т.е. задача (1) - (3) имеет не более одного решения. Доказано утверждение:

Теорема 4 (единственности). *При выполнении условий $(j),\ (jj)$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$ в (jj) задача (1) - (3) имеет не более одного решения.*

Однозначная разрешимость квазилинейной задачи Дирихле с квазидиагональными матрицами коэффициентов (§6).

Рассматривается квазилинейная задача Дирихле в случае, когда матрицы $(\mu^k, A, B),\ k = 1,2$ коэффициентов являются квазидиагональными в смысле:

(J) $$\sup_{i\neq j} |c_{ij}| = \delta \ll 1,\ C = \{c_{ij}\} = \{\mu^1,\ \mu^2,\ A,\ B\},\ i,j = \overline{1,n},$$

которая для $k-$го уравнения системы (1) имеет вид:

$$\mathrm{w}_{k\bar z} + \mu_{kk}^1 \mathrm{w}_{kz} + \mu_{kk}^2 \bar{\mathrm{w}}_{k\bar z} + A_{kk}\mathrm{w}_k + B_{kk}\bar{\mathrm{w}}_k + F_k + \sum_{j=1, j\neq k}^{k-1} \delta_{kj}\Big(\mathrm{w}_{jz} + \bar{\mathrm{w}}_{j\bar z} + \mathrm{w}_j + \bar{\mathrm{w}}_j\Big) = 0, \tag{7}$$

$$\sup_{k,z,\mathrm{w}} \Big(\big|\mu_{kk}^1\big| + \big|\mu_{kk}^2\big|\Big) = \mu_0 < 1, \tag{8}$$

$$\mathrm{Im}\ \mathrm{w}_k(e^{i\gamma}) = 0,\ \gamma \in [0,2\pi],\ \mathrm{Re}\ \mathrm{w}_k(1) = 0, k = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Однозначная разрешимость задачи (7) - (9) доказана полностью аналогично §5.

Теорема 5 (существования). *Задача (7) - (9) имеет по крайней мере одно решение* $\mathbf{w}(z) \in W_q^{(1)} \cap N(\Omega),\ q > 2.$

Теорема 6 (единственности). *При выполнении условий* $(j),\ (jj)$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$ *в* (jj) *параграфа 5 задача (7) - (9) имеет не более одного решения.*

Гидродинамическая интерпретация результатов (§7).

В параграфе приводятся некоторые прикладные задачи теории фильтрации, к которым могут быть применены полученные и описанные в предыдущих параграфах результаты.

Глава II. Однозначная разрешимость задачи Дирихле для уравнений с матрицами коэффициентов.

В §1, §2 главы рассматривается квазилинейная задача Дирихле в случае, когда коэффициенты $(\mu^k, A^k),\ k = 1,2$ являются заданными треугольными матрицами $(n \times n)$. Путем линеаризации квазилинейной задачи Дирихле и покомпонентного решения системы уравнений получена априорная оценка решений, которая обеспечивает разрешимость поставленной задачи. Для этого используется представление решения с помощью потенциального оператора, которое позволяет построить вполне непрерывный оператор задачи. Единственность решений задачи Дирихле для квазилинейной системы уравнений доказывается аналогично главе I в предположении слабой связанности уравнений системы. В §3 изучается задача Дирихле для уравнений с квазитреугольными матрицами, а в §4 для неоднородных уравнений с ограниченной правой частью. §5 посвящен построению алгоритма численного решения задачи Дирихле в случае, когда матрицы коэффициентов $(\mu^k, A^k),\ k = 1,2$ близки к диагональным. Результаты, приведенные в главе, изложены в работе автора [3].

Постановка задачи. Обзор результатов (§1). В параграфе рассматривается постановка задачи Дирихле для комплекснозначной вектор-функции $\mathbf{w}(z) = (\mathrm{w}_1, \ldots, \mathrm{w}_n)$ $(\mathrm{w}_k = \varphi_k + i\psi_k,\ z = x + iy)$ в круге $|z| < 1:$

$$\mathbf{w}_{\bar z} - \mu^1(z, \mathbf{w})\mathbf{w}_z - \mu^2(z, \mathbf{w})\bar{\mathbf{w}}_{\bar z} = F_0(z, \mathbf{w}) \equiv A^1\mathbf{w} + A^2\bar{\mathbf{w}} + \mathbf{F} \tag{10}$$

$$\mathrm{Im}\ \mathrm{w}_k(t) = 0, \quad \mathrm{Re}\ \mathrm{w}_k(1) = 0, \quad k = \overline{1,n}, \quad |t| = 1. \tag{11}$$

Здесь $(\mu^k, A^k),\ \ k = 1,2$ — заданные квадратные матрицы $(n \times n)$, $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ — вектор - функция. Также приводится обзор результатов, полученных ранее.

Уравнения с треугольными матрицами (§2). В параграфе доказывается разрешимость поставленной задачи для треугольных матриц коэффициентов системы. Этот результат получен в работе автора [3].

Доказано утверждение:

Теорема 7 (существования). *Пусть элементы матриц (μ^k, A^k) и компоненты вектора $\mathbf{F}$ непрерывны по $\mathbf{w}$ при почти всех $z \in K$, матрицы μ^k дополнительно удовлетворяют условию $\sup\limits_{z,\mathbf{w},i}(|\mu^1_{i,j}| + |\mu^2_{i,j}|) = \mu_0 < 1,\ |\mu^k_{i,j}| \le M_0 < \infty$ и выполняется предположение $\sup\limits_{\mathbf{w}} ||A^k(z,\mathbf{w}), F_i(z,\mathbf{w})||_{p,K} = M < \infty,\ p > 2$. Тогда задача (10), (11) имеет по крайней мере одно решение $\mathbf{w}(z)$, удовлетворяющее неравенству*

$$||\mathbf{w}||^{(1)}_q \le N < \infty,\ 2 < q \le p. \tag{12}$$

Теорема единственности (2^0). Единственность решений задачи (10), (11) доказывается аналогично главе I, используя при этом специальный вид формулы конечных приращений: $\Delta\Phi(\mathbf{w}) = \sum\limits_{l=1}^{n} \Delta_l \Phi(\mathbf{w})$, условия $(j),\ (jj)$ §5 главы I и условие

(i) векторы $Q_{kk}(z,\mathbf{w})$ непрерывны по $\mathbf{w}$ при $z \in \Omega$ и для $\forall\ \mathbf{w} \in R^{2n}$

$$\sup_{k,\mathrm{w}} ||(A^1_{kk}(z,\mathbf{w}), A^2_{kk}(z,\mathbf{w}), F_{kk}(z,\mathbf{w}))||_{p,\Omega} \le R_0 < \infty,\ p > 2.$$

В предположении, что система имеет два различных ограниченных решения, рассматривается уравнение для их разности, к решению которого применяется оценка, полученная в главе I.

Теорема 8 (единственности). *Пусть для элементов матриц (μ^k, A^k) и компонент вектора $\mathbf{F}$ выполняются условия $(j),\ (jj)$ §5 главы I и условие (i). Тогда задача (10), (11) имеет не более одного решения.*

Уравнения с квазитреугольными матрицами (§3). Однозначная разрешимость квазилинейной задачи Дирихле с квазитреугольными матрицами коэффициентов

$$(l) \qquad \sup_{i<j} |c^k_{ij}| = \delta \ll 1,\ C^k = \{c^k_{ij}\} = (\mu^k,\ A^k),\ k = 1,2,\ i,j = \overline{1,n}$$

доказывается полностью аналогично §2:

Теорема 9 (существования). *Пусть элементы матриц (μ^k, A^k) и компоненты вектора $\mathbf{F}$ непрерывны по $\mathbf{w}$ при почти всех $z \in K$, матрицы μ^k, A^k удовлетворяют условиям (l), матрицы μ^k дополнительно удовлетворяют условиям $\sup\limits_{z,\mathbf{w},\mathbf{i}}(|\mu^1_{i,j}| + |\mu^2_{i,j}|) = \mu_0 < 1,\ |\mu^k_{i,j}| \le M_0 < \infty$ и выполняется предположение $\sup\limits_{\mathbf{w}} \left|\left|A^k(z,\mathbf{w}), F^k_i(z,\mathbf{w})\right|\right|_{p,K} = M < \infty,\ p > 2$. Тогда задача (10), (11) имеет по крайней мере одно решение $\mathbf{w}$, удовлетворяющее неравенству*

$$\left|\left|\mathbf{w}\right|\right|^{(1)}_q \le 2C, q > 2. \tag{13}$$

Теорема 10 (единственности). *Пусть для элементов матриц (μ^k, A^k) и компонент вектора $\mathbf{F}$ выполняются условия $(j),\ (jj)$ §5 главы I и условие (i) §2. Тогда задача (10), (11) имеет не более одного решения.*

Неоднородные системы с ограниченными матрицами (§4). В параграфе 2 доказана однозначная разрешимость квазилинейной задачи Дирихле с треугольными матрицами (μ^k, A^k), $k = 1, 2$ коэффициентов. Здесь рассмотренные выше результаты, распространяются на случай квадратных $(n \times n)$ матриц μ^k, $k = 1, 2$ коэффициентов уравнения при условии ограниченности правой части уравнения. Материалы параграфа соответствуют работе автора [3].

Теорема 11 (существования). *Пусть матрицы μ^k и вектор $\mathbf{F}$ непрерывны по $\mathbf{w}$ при почти всех $|z| < 1$ и выполняются условия $\sup\limits_{z,\mathbf{w},\mathbf{i}}(|\mu^1_{i,j}| + |\mu^2_{i,j}|) = \mu_0 < 1$, $|\mu^k_{i,j}| \leq M_0 < \infty$, $\sup\limits_{\mathbf{w}} ||\mathbf{F}_0(z, \mathbf{w})||_{p,K} = N < \infty$, $p > 2$. Тогда существует по крайней мере одно решение $\mathbf{w}(z)$ задачи (10), (11), удовлетворяющее оценке (12).*

Численная аппроксимация (§5). В параграфе, аналогично работе Ашыралыева Ч., Монахова В. Н., построен алгоритм численного решения краевой задачи (10), (11) в случае, когда матрицы (μ^k, A^k), $k = 1, 2$ близки к диагональным.

Рассматривается интегральное уравнение (3^0)

$$\mathbf{f}(z) - \mu(z)S(\mathbf{f}|z) = \mathbf{g}(z). \tag{14}$$

Итерационный алгоритм нахождения его решения $\mathbf{f}$ строится в квадрате $D = \{x, y\big|\ |x| < \delta,\ |y| < \delta\}$, в котором производятся два разбиения с шагом $h = \delta/N$, где $(N+1)^2$ — число узлов. Узлы, соответственно, первого и второго разбиений определяются формулами:

$$z_{k,m} = -\delta(i+1)/2 + (k-1)h + (m-1)hi,\ z^*_{k,m} = z_{k,m} + (i+1)h/2, k, m = \overline{1, N+1},$$

$z_{k,m} \in \Omega^1$, $z^*_{k,m} \in \Omega^2$, где Ω^1 и Ω^2 — сетки, соответствующие разбиениям.

Расчетные формулы итерационного алгоритма для решения уравнения (14) имеют вид:

$$f^{*[n+1]}_{ij} = \frac{1}{\pi i}\ \mu(z_{ij}) \sum_{k,m=1}^{N} f^{[n]}_{km} \cdot S^1_{km}(z_{ij}) + g(z_{ij}),\ i, j = \overline{1, N}, \tag{15}$$

$$f^{[n+1]}_{ij} = \frac{1}{\pi i}\ \mu(z^*_{ij}) \sum_{k,m=1}^{N} f^{*[n+1]}_{km} \cdot S^2_{km}(z^*_{ij}) + g(z^*_{ij}),\ i, j = \overline{1, N}, \tag{16}$$

где

$$S^{(1)}_{k,m}(z) = \frac{1}{\pi i}\ \ln\left[\frac{(z_{k,m} - z)(z_{k+1,m+1} - z)}{(z_{k+1,m} - z)(z_{k,m+1} - z)}\right],\ S^{(2)}_{k,m}(z) = \frac{1}{\pi i}\ \ln\left[\frac{(z^*_{k,m} - z)(z^*_{k+1,m+1} - z)}{(z^*_{k+1,m} - z)(z^*_{k,m+1} - z)}\right],$$

n — номер итерации. Нормы сеточных функций в пространстве $l_2(\Omega_h)$ определяются следующим образом: $||f||_{l_2(\Omega_h)} = \sum\limits_{k,m=1}^{N} |f_{k,m}|^2 \cdot h^2$.

Итерационный алгоритм (15), (16) был реализован на ЭВМ с помощью алгоритмического языка Fortran PS 4.0. В качестве тестового примера использовался следующий вариант: $N = 10$, точное решение $f^T = z$, $\mu^2 = 0$,

$$\mu^1 = \mu(z) = \begin{cases} 0,4, & |z| \le 0,3; \\ 0,8, & 0,3 < |z| < 0,6; \\ 0,6, & 0,6 \le |z| \le 1, \end{cases}$$

$$g(z) = z - \frac{1}{\pi i}\ \mu(z)\ \ln\left[\frac{(z+1+i)(z-1-i)}{(z+1-i)(z-1+i)}\right].$$

В нижеприведенной таблице показано, на какой итерации достигается заданная точность, дана среднеквадратичная погрешность вычисления функции f между итерациями $||f_h^{[i]} - f_h^{[i+1]}||$, i — номер итерации и при приближении к точному решению $||f_h^{[i]} - f_h^{\mathrm{T}}||$:

Точность	Номер итерации	Погрешность $\lVert f_h^{[i]} - f_h^{[i+1]}\rVert$	Погрешность $\lVert f_h^{[i]} - f_h^{\mathrm{T}}\rVert$
10^{-2}	3	$3.296511 \cdot 10^{-3}$	$1.457851 \cdot 10^{-4}$
10^{-3}	4	$1.840367 \cdot 10^{-4}$	$1.101224 \cdot 10^{-5}$
10^{-8}	9	$3.040707 \cdot 10^{-9}$	$1.758556 \cdot 10^{-10}$
10^{-12}	13	$2.35296 \cdot 10^{-13}$	$3.129372 \cdot 10^{-14}$

Для сравнения был использован полностью аналогичный пример, приведенный в работе Ашыралыева Ч., Монахова В. Н., реализованный на ЭВМ ЕС 1061 с помощью пакета стандартных программ PALLINA. Там заданная точность, равная 10^{-2} достигается на 4 итерации за 5 секунд. В расчетах автора эта же точность достигается на 3 итерации за 0,062 секунды. Разница между данными, приведенными в указанной работе и расчетами автора для $||f_h^{[i]} - f_h^{[i+1]}||$ составляет $2,18 \cdot 10^{-3}$, а для $||f_h^{[i]} - f_h^{\mathrm{T}}||$ — $6,72 \cdot 10^{-5}$.

Описанный выше тестовый пример был реализован также для случаев $N = 50$ и $N = 100$. Примеры тестовых расчетов показывают быструю сходимость алгоритма в пространстве $l_2(\Omega_h)$.

Глава III. Гидродинамика тел со струями (схемы Шурыгина).

Введение (§1). В параграфе приводится обзор результатов по так называемым струйным течениям, в частности, по кавитационной схеме Шурыгина, которая приводит к построению конформных отображений неоднолистных областей течения на канонические области (верхнюю полуплоскость, круг и т.д.)

Многолистные многоугольники (§2). В параграфе приводится постановка задачи (пункт 1^0) в случае n - листной области. Рассматривается комплексный потенциал течения $\mathrm{w} = \mathrm{w}(z)$ $(z = x + iy,\ \mathrm{w} = \varphi + i\psi)$ в n - листной области D, где $D^* = \mathrm{w}(D)$ — образ области D в плоскости переменного w, $P^* = \partial D^*$– образ полигона $P = \bigcup\limits_{k=2}^{n} P^k$, состоящий из линий тока $\psi = const$. Здесь полигоны P^k предполагаются простыми:

$$(i) \qquad 0 < \delta \le \alpha_i^k \le 2,\ |\ln l_i^k| \le \delta^{-1},\ i = \overline{1, m_k},\ k = \overline{2, n}.$$

В области D имеются $(n-1)$ и $(3-n)$ на P точек B_k разветвления потока, в которых комплексная скорость течения обращается в нуль $d\mathrm{w}/dz(B_k) = 0$.

Производные конформных отображений $z : K \to D, \mathrm{w} : K \to D^*$ внешности единичного круга $K : |\zeta| > 1$ на области D и D^* представляются в виде:

$$\frac{dz}{d\zeta} = N_0 \zeta^{-2} \prod_{k=2}^{n} \prod_{i=0}^{m_k} (\zeta - t_i^k)^{\alpha_i^k - 1} \equiv N_0 \Pi(\zeta), \tag{17}$$

$$\frac{d\mathrm{w}}{d\zeta} = N_1 \zeta^{-2} \prod_{k=2}^{n} \frac{(\zeta - \zeta_k)(\zeta - \zeta_k^*)}{\zeta - t_0^k} \prod_{i=1}^{3-n} (\zeta - \tau_i) \equiv f(\zeta). \tag{18}$$

Формулы (17), (18) при $n = 1$ отвечают обтеканию конечного полигона P, а при $n = 2$ — течению по схеме Эфроса с заданной формой струй. Случай $n \ge 3$ отвечает собственно схеме Шурыгина и при принятых предположениях на полигоне P, либо отсутствуют точки разветвления и схода потока, либо они находятся в вершинах полигона P^k.

Постоянные $\zeta_k,\ |\zeta_k| > 1$ $(k = \overline{2, n})$ и τ_i $(i = \overline{1, 3-n})$ считаются заданными, $|N_0| = 1$, а t_i^k $(i = \overline{0, m_k},\ k = \overline{2, n})$ — должны отыскиваться из соответствующей полигону P системы уравнений при произвольном выборе двух вещественных констант $\gamma_i^k \pi = \arg t_i^k$:

$$l_i^k = \int\limits_{t_i^k}^{t_{i+1}^k} |\Pi(t)| dt \equiv f_i^k(\mathbf{T});\ i = \overline{1, m_k - 1},\ k = \overline{2, n}, \tag{19}$$

$$l_0^k = \pi \left| (t - t_0^k) \frac{dz}{dt} \right|_{t = t_0^k} \equiv f_0^k(\mathbf{T}),\ k = \overline{2, n},\ \text{где } \mathbf{T} = (t_0^k, \ldots, t_{m_k}^k). \tag{20}$$

Априорные оценки и локальная единственность (2^0). Здесь приводятся уже известные сведения о локальной единственности решения $\mathbf{T}$ системы уравнений, отвечающей общей струйной задаче для простого полигона и об априорных оценках искомого решения $\mathbf{T}$ системы (19), (20).

Лемма 1. *Каждое решение $\mathbf{T} = (t_0^k, \ldots, t_{m_k}^k)$ системы уравнений (19), (20), соответствущей полигону P^k, удовлетворяющее условию (i), подчиняется неравенствам*

$$|t_{i+1}^k - t_i^k| \ge \varepsilon(\delta) > 0,\ i = \overline{0, m_k - 1},\ k = \overline{2, n}. \tag{21}$$

Для производных $d\mathrm{w}/d\zeta$ и $dz/d\zeta$ конформных отображений $\mathrm{w} : E \to D^*,\ z : E \to D$ верхней полуплоскости $E : \mathrm{Im}\ \zeta > 0$ на области D и D^* рассматриваются следующие представления:

$$\frac{d\mathrm{w}}{d\zeta} = \prod_{i=1}^{3-n} (\zeta - \tau_i)^{-1/2} = \Pi_0(\zeta), \tag{22}$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = \Pi(\zeta) M(\zeta), \tag{23}$$

$$\Pi = \prod_{i=0}^{m_k} \prod_{k=0}^{n+1} (\zeta - t_i^k)^{\alpha_i^k - 1};\ M = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|t|>1} \frac{|\Pi_0(t)| dt}{\Pi(t)(t-\zeta)},\ \sum_{k=2}^{n} \sum_{i=0}^{m_k} (\alpha_i^k - 1) = 2.$$

Для произвольно фиксированного в (22), (23) вектора $\mathbf{T} = (t_0^k, \ldots, t_{m_k}^k) \in R^n$ неизвестных постоянных t_i^k $(k = \overline{2,n}\ i = \overline{0, m_k})$ рассматривается система уравнений, которая представляется функциональным уравнением

$$\mathbf{l} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\alpha}), \tag{24}$$

где решение $\mathbf{u} = (u_1^k, \ldots, u_{m_k}^k) \in R^n,\ u_i^k = t_i^k - t_{i-1}^k,\ (k = \overline{2,n},\ i = \overline{1, m_k})$ — вектор, через который однозначно определяется вектор $\mathbf{T} = (t_0^k, \ldots, t_{m_k}^k) \in R^n$.

Лемма 2. *(о локальной единственности) Решения* $\mathbf{T} = (t_0^k, \ldots, t_{m_k}^k)$ *системы уравнений (24), отвечающие общей струйной задаче для простого полигона* P, *локально единственны, т.е.*

$$\left| \frac{D\mathbf{g}}{D\mathbf{T}} \right| = \left\{ \frac{\partial g_i^k}{\partial t_j^k} \right\} \geq \varepsilon_0(\delta) > 0. \tag{25}$$

Смешанная краевая задача с параметрами (§3). Смешанная краевая задача возникает в гидродинамике при описании потенциальных течений идеальной жидкости с несколькими свободными границами. В параграфе приводятся известные результаты об эквивалентности видоизмененной смешанной краевой задачи

$$\mathrm{Re}\ \omega(t) = f_1(t),\ t \in L^1;\ \mathrm{Im}\ \omega(t) = f_2(t,c),\ t \in L^2, \tag{26}$$

вариационной задаче:

$$J(F) = \int\limits_{L^2} |T(F|e^{i\theta}) - g(e^{i\theta}) - Q(F)|^2 d\theta, \tag{27}$$

Лемма 3. *1. Если* (ω, c) *— ограниченное решение задачи (26), то*

$$F_*(e^{i\theta}) = Re\ \omega(e^{i\theta}),\ \theta \in L$$

является решением вариационной задачи (27).

2.Если F_0 — решение вариационной задачи (27), то $\omega(\zeta) = S(F_0|\zeta)$ является решением задачи (26), причем константы c_k определяются по формуле

$$c_k = \frac{1}{\alpha_{k+1} - \beta_k} \int\limits_{\beta_k}^{\alpha_{k+1}} T(F_0|e^{i\gamma}) d\gamma.$$

Схемы Шурыгина (§4).

Одна свободная граница (1^0). Рассматривается задача обтекания, изученная в параграфе 2, в которой одна из струй является неизвестной. Доказывается единственность решения системы уравнений (19), (20).

В пункте 2 рассматривается схема Шурыгина с несколькими свободными границами и с помощью теоремы Лере - Шаудера о неподвижной точке доказывается существование по крайней мере одного решения системы (19), (20).

В пункте 3 сформулирована теорема существования и единственности струйных течений:

Теорема 12. *При выполнении предположений (i) существует по крайней мере одно течение по схеме Шурыгина с несколькими свободными границами.*

Если свободная граница одна или вообще отсутствует, то такое течение единственно.

Глава IV. О разрешимости краевых задач на римановых поверхностях.

Вспомогательные сведения (§1).

Первый параграф содержит вспомогательные сведения из теории римановых поверхностей (р.п.): *основные топологические понятия теории р.п. (1^0), дифференциальные формы (2^0).*

О разрешимости краевой задачи сопряжения для нелинейного уравнения Векуа на римановой поверхности (§2). Пусть D — риманова поверхность рода $\rho \geq 0$, $L \subset D$ — гладкий замкнутый контур на D, разбивающий ее на две части $D^{\pm}$. Рассмотрим задачу определения функции $\mathrm{w}(z)$, удовлетворяющей на компактной римановой поверхности D рода $\rho \geq 0$, нелинейному уравнению Векуа:

$$\overline{\partial}\mathrm{w} = \mathrm{w}A(z, \mathrm{w}) + \overline{\mathrm{w}}B(z, \mathrm{w}) + F(z, \mathrm{w}),\ z \in D^{\pm}, \tag{28}$$

а на L — краевому условию линейного сопряжения

$$\mathrm{w}^+(t) - G(t)\mathrm{w}^-(t) = g(t),\ t \in L\,. \tag{29}$$

Задачи типа (28), (29) на римановой поверхности имеют приложения в гидродинамике (в частности, в так называемой схеме обтекания Эфроса) и теории фильтрации.

Обычно, при исследовании разрешимости задачи сопряжения необходима корректная постановка задачи, т.е. введение в эту задачу дополнительных условий, обеспечивающих существование, единственность решения и его непрерывную зависимость от исходных данных (A, B, F, G, g). Приводится корректная постановка краевой задачи сопряжения аналитических функций следующего вида:

$$\begin{cases} \overline{\partial}\Phi = 0, & z \in D^{\pm}; \\ \Phi^{+}(t) - G(t)\Phi^{-}(t) = g(t) - \sum\limits_{k=1}^{l_1} c_k \psi_k(t), & t \in L; \\ \Phi^{\pm}(p_j) = 0, & j = \overline{1, l_0}, \end{cases} \tag{30}$$

где

$$l_0(\varkappa) = \begin{cases} 0, & \varkappa < 0, \\ \left[\dfrac{\varkappa}{2}\right] + 1, & 0 \le \varkappa \le 2\rho - 2, \\ \varkappa - \rho + 1, & \varkappa \ge 2\rho - 1, \end{cases}$$

$$l_1(\varkappa) = l_0 - \varkappa + \rho - 1.$$

С помощью введенных стандартным образом операторов

$$T_0^{+}(V \mid t) - T_0^{-}(V \mid t) = \sum_{k=1}^{\rho} c_k^0 \psi_k^0(t);\ c_k^0 = c_k^0(V) = \int\limits_D \varphi_k^0(z) V(z),\ k = \overline{1, \rho}.$$

доказывается эквивалентность краевой задачи сопряжения для линейного уравнения Векуа задаче для аналитических функций:

Теорема 13. *Задачи*

$$\begin{cases} \overline{\partial}\mathrm{w} = \mathrm{w}A(z) + F(z),\ z \in D^{\pm}, \\ \mathrm{w}^{+}(t) - G(t)\mathrm{w}^{-}(t) = g(t),\ t \in L, \end{cases} \tag{31}$$

$$\begin{cases} \overline{\partial}\Phi = 0,\ z \in D^{\pm}, \\ \Phi^{+}(t) - G_1(t)\Phi^{-}(t) = g_1(t),\ t \in L, \end{cases} \tag{32}$$

эквивалентны.

Здесь

$$G_1(t) = G(t)\exp\left(-\sum_{k=1}^{\rho} c_k^0(A)\psi_k^0(t)\right), g_1(t) = g(t)\exp\left(-T_0^{+}(A|t)\right) - \sum_{k=1}^{l_1} c_k \psi_k(t), \tag{33}$$

$$c_k = \int\limits_D \varphi_k(z) e^{-T_0(A|z)} F(z),\ \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{l_1}) = \varphi(G_1),\ \Psi = (\psi_1, \ldots \psi_{l_1}) = \Psi(G_1).$$

При этом решения задач (31) и (32) связаны равенством

$$\mathrm{w}(z) = \Phi(z) e^{T_0(A|z)} + e^{T_0(A|z)} T_{G_1}(F e^{-T_0 A}|z). \tag{34}$$

Также для линейной задачи доказана теорема об однозначной разрешимости:

Теорема 14. *Пусть функция $G_1(t)$ имеет вид (33). Тогда существует единственное решение задачи*

$$\begin{cases} \overline{\partial}\mathrm{w} = \mathrm{w}A(z) + F(z),\ z \in D^{\pm}, \\ \mathrm{w}^{+}(t) - G(t)\mathrm{w}^{-}(t) = g(t) - \sum\limits_{k=1}^{l_1} c_k\widetilde{\psi}_k(t),\ t \in L, \\ \mathrm{w}^{\pm}(p_j) = 0\,, \quad j = \overline{1, l_0}, \end{cases} \tag{35}$$

где $\widetilde{\psi}_k(t) = \psi_k(t)e^{T_0^{+}(A|t)},\ \Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_{l_1}) = \Psi(G_1),\ P = (p_1, \ldots, p_{l_0}) = P(G_1)$. Это решение представляется в виде

$$\mathrm{w} = e^{T_0(A|z)}T_{G_1}(Fe^{-T_0A}|z) + e^{T_0(A|z)} \cdot \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L K_1(t,z)e^{-T_0^{-}(A|t)}g(t),$$

$$c_k = \int\limits_D \varphi_k(z)e^{-T_0(A|z)}F(z) + \int\limits_L g(t)e^{-T_0^{-}(A|t)}\varphi_k(t),$$

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{l_1}) = \varphi(G_1),\ K_1 = K(G_1|t,z).$$

Отображения

$$\mathrm{w} = U(A,F,G,g) : [L_p(D^{\pm})]^2 \times [C^{\alpha}(L)]^2 \to W_p^1(D^{\pm}) \cap C^{\alpha}(D^{\pm}),$$

$$C = (c_1, \ldots, c_{l_1}) = C(A,F,G,g) : [L_p(D^{\pm})]^2 \times [C^{\alpha}(L)]^2 \to C^{l_1}$$

являются непрерывными. При этом оператор U,

$$U(A,F) : [L_p(D^{\pm})]^2 \to C^{\alpha}(D^{\pm}),\ \alpha < \frac{p-2}{p},\ p > 2$$

вполне непрерывен.

Доказана разрешимость нелинейной краевой задачи Векуа на римановой поверхности:

Теорема 15. *Пусть отображения $A, B, F(\mathrm{w}) : C \to L_p(D^{\pm}),\ p > 2$ непрерывны по w и $\|A, B, F\|_p \le M$, $\forall \mathrm{w} \in \mathbb{C}$. Тогда существует решение*

$$\mathrm{w}^{\pm}(z) \in C^{\beta}(D^{\pm}),\ \beta = \beta(\alpha, p) > 0$$

задачи (28), (29).

Основные результаты диссертации:

- доказана однозначная разрешимость задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических систем уравнений с матрицами коэффициентов $Q^1,\ Q^2$ близкими к диагональным, треугольным и квазидиагональным;

- доказано существование и единственность струйных течений, отвечающий схеме Шурыгина;
- доказана разрешимость краевой задачи сопряжения для нелинейного уравнения Векуа на римановой поверхности;
- численно решена краевая задача Дирихле для диагональных матриц коэффициентов в случае, когда область решения является квадратом.

Автор выражает искреннюю признательность научному консультанту Валентину Николаевичу Монахову за его титаническое терпение, проявленное во время руководства выполнением работы, а также научному руководителю Семенко Евгению Вениаминовичу.

Список литературы

[1] Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений // Новосибирск: Наука, 1977, 420 с.

Публикации автора по теме диссертации

[2] Раенко Е.А. Об однозначной разрешимости задачи Дирихле для квазианалитического вектора // Динамика сплошной среды. 2000. Вып. 116. С. 90-97.

[3] Раенко Е.А. Краевые задачи для квази-голоморфного вектора // Динамика сплошной среды. 2001. Вып. 118. С. 65-70.

[4] Монахов В.Н.,Раенко Е.А. Струйные течения по схемам Шурыгина //Докл.АН. 2006. Т.407, №1. С. 1-3.

[5] Раенко Е.А.,Семенко Е.В. О разрешимости краевой задачи сопряжения для нелинейного уравнения Векуа на римановой поверхности //Докл.АН. 2006. Т. 409, №3. С. 316-319.

Подписано в печать 10.11.2006. Формат: 60x84/16.
Усл. печ. л. — 1. Заказ № 104. Тираж 100 экз.

РИО Горно-Алтайского государственного университета,
649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, д. 1.

Отпечано полиграфическим отделом
Горно-Алтайского государственного университета
649000, г. Горно-Алтайск, ул. Ленкина, д. 1.